

УДК 330.43+ 336.67

UDC 330.43+ 336.67

5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы экономики (физико-математические науки, экономические науки)

5.2.2. Mathematical, statistical and instrumental methods of economics (physical and mathematical sciences, economic sciences)

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ФИНАНСОВЫХ ПИРАМИД,
УЧИТЫВАЮЩИЕ ПРИРОСТ КЛИЕНТОВ ЗА
СЧЕТ РЕКЛАМНОЙ КОМПАНИИ**

**STOCHASTIC MODELS OF FINANCIAL
PYRAMIDS THAT TAKE INTO ACCOUNT THE
GROWTH OF CUSTOMERS AT THE EXPENSE
OF AN ADVERTISING COMPANY**

Кесиян Грант Арутович
доцент кафедры анализа данных и искусственного
интеллекта
grant.kesiyan@mail.ru

Kesiyan Grant Arutovich
Associate Professor of the Departments of Data
Analysis and Artificial Intelligence
grant.kesiyan@mail.ru

*Кубанский государственный университет,
Краснодар, Россия*

Kuban State University, Krasnodar, Russia

В данной статье предложены две модели в форме систем стохастических дифференциальных уравнений, описывающих динамику прибыли и количества клиентов финансовых пирамид. В первой модели ИТО-процесс, который описывает динамику клиентов содержит два детерминированных фактора: расходы на рекламу и общительность клиентов. Во второй модели эффективность рекламной компании характеризуется параметром интенсивности процесса Орнштейна–Уленбека. Кроме того, предложена оценка точки максимума прибыли, которая связана с общим числом потенциальных клиентов

In this article, two models are proposed in the form of systems of stochastic differential equations describing the dynamics of profit and the number of clients of financial pyramids. In the first model, the ITO process that describes customer dynamics contains two deterministic factors: advertising costs and customer sociability. In the second model, the effectiveness of an advertising company is characterized by the intensity parameter of the Ornstein–Uhlenbeck process. In addition, an estimate of the maximum profit point is proposed, which is related to the total number of potential customers

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ, ФИНАНСОВАЯ
ПИРАМИДА, СХЕМА ПОНЦИ,
СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ, ИТО-ПРОЦЕССЫ

Keywords: MATHEMATICAL MODELING,
FINANCIAL PYRAMID, PONZI SCHEME,
STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS, ITO-
PROCESSES

<http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-200-026>

Введение.

На текущий момент существует множество работ, посвященных изучению деятельности финансовых пирамид [1-5], в том числе использующих различные подходы для построения математического описания. Из современных работ можно отметить [4-5], в которых обнаруживается схема Понци с помощью методов машинного обучения.

Одним из основных факторов функционирования финансовой пирамиды является пирамидальная схема выплат дивидендов старым

<http://ej.kubagro.ru/2024/06/pdf/26.pdf>

участникам за счет взносов новых участников. И если такая система позволяет удерживать высокий приток участников за счет рекламной компании, добровольных агентов или посредством распространения слухов, то ее деятельность может быть продолжительной. Однако, как показано в исследовании [1], деятельность любой финансовой пирамиды заканчивается банкротством.

На формирование прибыли финансовой пирамиды, кроме детерминированных, оказывают влияние различные случайные факторы, которые формируются в том числе из-за различных типов вкладов. Среди таких случайных факторов можно выделить:

- возможность разместить произвольную сумму, ограниченную снизу или сверху или одновременно снизу и сверху;
- не известен выбор под какой процент из доступного множества будет размещаться вклад;
- никто не гарантирует момент снятия и сумму снятия;
- возможность перераспределения средств внутри (и собираемая сумма может меняться случайным образом);
- колебания количества клиентов;
- влияние различных условий снятия: срочный вклад (договор на определенный срок, в течение которого деньги без потери процентов снять нельзя) и вклад до востребования (деньги можно снимать в любое время без потери процентов), при этом нет гарантий того, что участники не будут снимать деньги с потерей процентов;
- влияние различных способов начисления процентов: без капитализации (проценты начисляются в конце срока вклада) и с капитализацией (проценты начисляются периодически, например ежемесячно). Не известен выбор способа начисления процентов;

- различные внешние факторы, влияющие на поведение вкладчиков, например: политические, экономические, социальные, технологические, экологические, правовые и этические.

Таким образом, при моделировании деятельности финансовой пирамиды можно сказать, что основная величина, от которой зависит формирование прибыли пирамиды это количество участников и именно его значение будет стохастическим. Однако, с учетом обозначенных выше предпосылок со случайными факторами, можно сказать, что сама прибыль также имеет стохастическую природу.

В данной работе мы рассматриваем деятельность финансовой пирамиды как систему стохастических процессов, развиваем исследование [1], в частности, мы обобщим модель с приростом клиентов за счет рекламной компании.

1 Общая модель, описывающая динамику прибыли и количества участников пирамиды

Для начала приведем обозначения исходных моделей. Прибыль финансовой пирамиды в текущий момент t в непрерывном детерминированном случае имеет следующий вид:

$$S(t)^{\text{det}} = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau, t > 0 \quad (1)$$

где:

– $S(t)^{\text{det}}$ – прибыль финансовой компании в текущий момент времени t ;

– $S_0 = S(0)$;

– m – фиксированная сумма вклада (предполагаем, что используется один тип вклада);

– $\alpha(t)$ – расходы на рекламу в текущий момент времени t ;

- $N(t)$ – количество клиентов в текущий момент времени t ;
- $N_0 = N(0)$;
- β – процент по вкладу, который начисляется ежемесячно (предполагаем месяц в качестве базового периода);
- $\beta m \int_0^t N(\tau) d\tau$ – выплата дивидендов клиентам;
- $mN(t)$ – денежные поступления от клиентов.

Уравнение (1) в дифференциальной форме записывается так:

$$\frac{dS^{\text{det}}}{dt} = m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \quad (2)$$

Далее, учитывая тот факт, что имеется множество случайных факторов (произвольный выбор типов вкладов с различными суммами, ставками, способами выплат, способами снятия средств, а также влияние различных внешних факторов), предполагаем, что как динамика количества участников N , так и сама прибыль S имеют стохастическую природу.

Таким образом, в общем виде можно записать следующую систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) в форме ито-процессов, описывающих динамику прибыли финансовой пирамиды и количества ее участников:

$$\begin{cases} dS = F^S(t, S, N)dt + \sum_{k=1}^n G_k^S(t, S, N)\delta W_k \\ dN = F^N(t, S, N)dt + \sum_{k=1}^n G_k^N(t, S, N)\delta W_k \end{cases} \quad (3)$$

Где:

- $F^S(t, S, N)$ и $F^N(t, S, N)$ это детерминированные коэффициенты сноса системы;

- $G_k^S(t, S, N)$ и $G_k^N(t, S, N)$ функции волатильности, характеризующие различные случайные факторы, воздействующие на собираемую прибыль и количество клиентов;

- $\delta W_k = \varepsilon_k \sqrt{t}$, бесконечно малый винеровский процесс для всех $k = 1, \dots, n$;

- n – положительное целое число, характеризующее количество случайных факторов, которое может быть не равно количеству уравнений в системе.

Для изучения такого рода процессов можно использовать как траектории точных решений, так и плотность вероятностей. Последняя позволяет определять такие характеристики процесса, как среднее, волатильность, автоковариацию и т.д.

2 Методы анализа

В процессе деятельности финансовых пирамид выделяют следующие моменты времени:

- t^+ – начало безубыточной деятельности;
- t^* – точка максимума функции $S(t)$;
- t^b – время банкротства.

В настоящей работе будем оценивать параметр t^* . Исследование t^+ и t^b будет проводится в следующих работах.

Дадим основные определения, которые потребуются в работе.

Если у нас задан **случайный процесс**, который является функцией двух переменных $X_t(\omega)$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ (здесь t – обозначает временную переменную (временной параметр)), то $X_t(\omega_0)$ при фиксированном параметре случайности ω_0 представляет собой **траекторию** случайного процесса, которая является неслучайной функцией временного параметра, а при фиксации временного параметра $X_{t_0}(\omega)$ становится обычной

(одномерной) случайной величиной, называемой *сечением процесса* в точке t_0 .

В работе, для первой модели, используется неявная численная схема SADISRK2 [6], выборочное среднее, несмещенная оценка дисперсии сечений и коридор волатильности.

Для процесса $x(t)$ под *коридором волатильности* будем понимать область внутри верхней σ^+ и нижней σ^- границ, которые для каждого сечения процесса определяются по следующим формулам:

$$\sigma^+ = \langle x \rangle + 2\sigma$$

$$\sigma^- = \langle x \rangle - 2\sigma$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{k}{k-1} D_s}$$

Где D_s - выборочная дисперсия сечения, k - количество траекторий в сечении.

Для второй модели используется точное решение логарифмического процесса Орнштейна-Уленбека для траекторий, а также точное решение для среднего процесса.

3 Модель, учитывающая прирост клиентов за счет рекламной компании

В работе [1] предложена детерминированная модель с приростом клиентов за счет рекламной компании, которая основывается на двух механизмах рекламы и описывается задачей Коши:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (k_1\alpha_1(t) + k_2\alpha_2(t)N)(K - N) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (4)$$

Где:

- α_1 – расходы на рекламу;

- α_2 – коэффициент общительности клиентов;
- k_1 и k_2 – параметры модели;
- K – общее число потенциальных клиентов.

Учтем правую часть уравнения (2) и правую часть первого уравнения (4) как детерминированные коэффициенты сноса $F^S(t, S, N)$ и $F^N(t, S, N)$ в системе (3), а также начальные условия, получим следующую систему СДУ в форме ито-процессов:

$$\begin{cases} dN = (k_1\alpha_1(t) + k_2\alpha_2(t)N)(K - N)dt + \sum_{k=1}^n G_k^N(t, S, N)\delta W_k \\ dS = (m\frac{dN}{dt} - \alpha_1(t) - \beta mN)dt + \sum_{k=1}^n G_k^S(t, S, N)\delta W_k \\ N(0) = N_0 \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (5)$$

Ввиду описанных ранее возможных случайных факторов предположим, что система испытывает следующие стохастические изменения:

- $\sigma_1 N \delta W_1$ – случайные колебания количества участников;
- $\sigma_2 S \delta W_2$ – случайные колебания прибыли.

В указанных выше выражениях σ_1 , и σ_2 – константы.

Тогда систему (5) можно переписать так:

$$\begin{cases} dN = (k_1\alpha_1(t) + k_2\alpha_2(t)N)(K - N)dt + \sigma_1 N \delta W_1 \\ dS = (m\frac{dN}{dt} - \alpha_1(t) - \beta mN)dt + \sigma_2 S \delta W_2 \\ N(0) = N_0 \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (6)$$

Предполагается, что шумы $\delta W_1 = \varepsilon_1 \sqrt{t}$, и $\delta W_2 = \varepsilon_2 \sqrt{t}$ некоррелированные.

Для S можно записать точное решение в неявной форме:

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + \sqrt{\int_0^t b^2(\tau) d\tau} * \varepsilon$$

Вообще говоря, так как в системе (6) dN не зависит от S , то первое уравнение можно решать независимо от второго уравнения. Второе уравнение же зависит от N .

Очевидно, что для системы (6) сложно получить точное решение, за исключением некоторых частных случаев, поэтому необходимо использовать **численные методы**.

В работе [6] проведен анализ устойчивости явного и неявного стохастических методов Рунге-Кутты приближенных решений СДУ. В результате был сделан вывод, что неявный метод демонстрирует устойчивость для различной величины шага сетки, в отличие от явного метода, который нестабилен при некоторых значениях шага сетки. Таким образом, для решения (6), будем использовать неявный метод SADISRK2.

Для проведения экспериментов согласно системы (6) зададим следующие исходные данные:

- сумма вклада $m = 10^5$;
- процент по вкладу $\beta = 0,3(30\%)$;
- количество участников до начала деятельности финансовой пирамиды $N_0 = 10$ (организаторы распространяли свои финансовые инструменты среди знакомых людей);
- общее число потенциальных клиентов $K = 2 \cdot 10^6$;
- сумма вкладов на начала деятельности финансовой пирамиды можно определить как денежные поступления от первых клиентов mN_0 минус сумма, потраченная финансовой пирамидой на рекламную компанию до начала деятельности, то есть, $S_0 = mN_0 - R_0$.
- пусть расход на рекламу будут постоянными $\alpha_1(t) = R_0 = 10^5$;
- коэффициент общительности клиентов $\alpha_2(t) = t$;
- параметры интенсивность влияния расходов на рекламу и интенсивность влияния общительности клиентов $k_1 = k_2 = 10^{-7}$;

- интенсивность шумов $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,1$;
- начальный момент времени $t_0 = 0$;
- конечный момент времени моделирования процесса $t_1 = 11$;
- шаг моделирования для неявной схемы $h = 0,01$.

Результаты моделирования 100 траекторий процессов $N(t)$ и $S(t)$ системы (6) представлены на рисунке 1.

По графику видно, что когда приток количество клиентов перестает расти, то прибыль пирамиды начинает уменьшаться. В настоящей модели, можно оценить t^* посредством визуального анализа графиков: для средней прибыли $t^*_{\langle S \rangle} \approx 7,3$. Нижняя граница коридора волатильности показывает, что часть траекторий прибыли может достичь максимума уже при $t^*_{\sigma^-} \approx 6,8$, а согласно верхней границе коридора волатильности прибыли – при $t^*_{\sigma^+} \approx 7,8$.

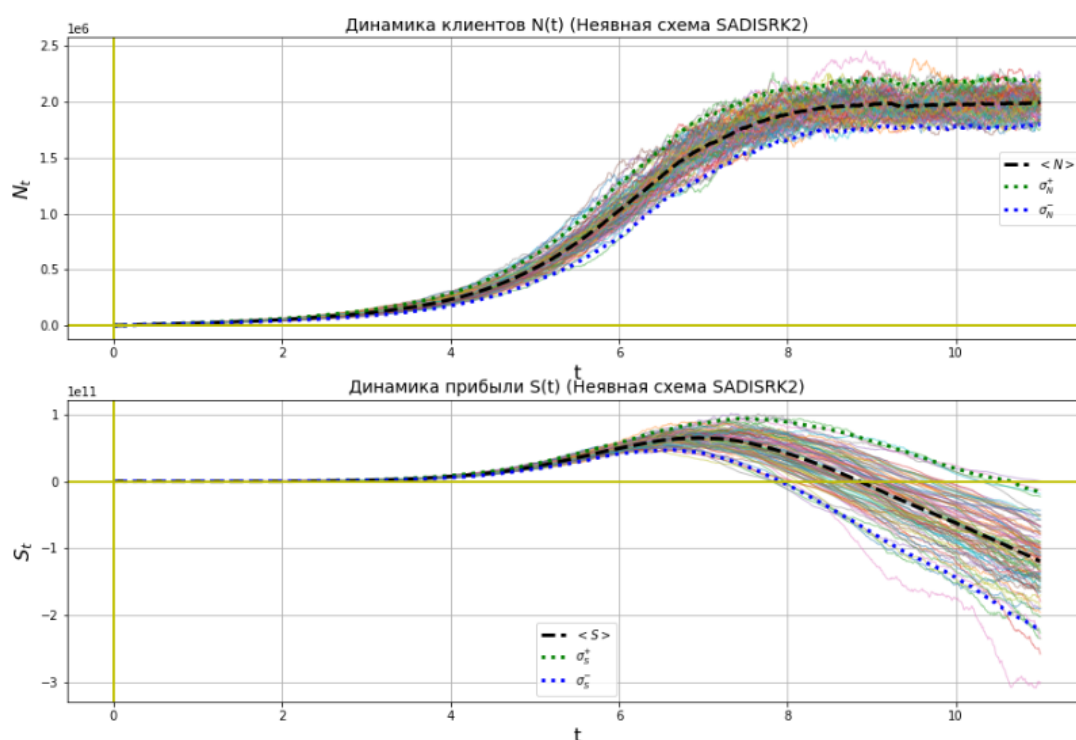


Рисунок 1 - Динамика клиентов и динамика прибыли финансовой пирамиды. На графике представлено 100 траекторий процесса $N(t)$ и 100 траекторий процесса $S(t)$, построенных с помощью численной неявной схемы SADISRK2.

4 Моделирование количества клиентов с помощью процессов Орнштейна-Уленбека

В системе (6) процесс $N(t)$ имеет сложный вид. Для обозримого аналитического решения и поиска t^* автор предлагает для моделирования $N(t)$ применить логарифмическую модель Орнштейна-Уленбека, которая сочетает в себе как положительность процесса, так и равновесный уровень. В нашем случае равновесный уровень должен быть равен числу потенциальных клиентов K .

Логарифмический процесс Орнштейна–Уленбека в наших обозначения задается уравнением:

$$dN = -\lambda \cdot N \left(\ln \frac{N}{\alpha} - 1 \right) dt + \sigma_1 \cdot N \delta W \quad (7)$$

Параметр λ характеризует интенсивность притяжения к равновесному уровню. *По сути, он включает в себя все эффекты влияния на динамику клиентов, такие как расходы на рекламу, общительность старых клиентов с новыми и другие.*

Решение процесса (7) можно найти с помощью леммы Ито:

$$N(t) = \alpha e^{1 - \frac{\sigma_1^2}{2\lambda} + \left[\ln \frac{N_0}{\alpha} - 1 + \frac{\sigma_1^2}{2\lambda} \right] e^{-\lambda t} + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\lambda}} \varepsilon \sqrt{1 - e^{-2\lambda t}}}$$

Среднее значение логарифмического процесса Орнштейна–Уленбека определяется выражением:

$$\overline{N(t)} = \alpha e^{1 - \frac{\sigma_1^2}{2\lambda} + \left[\ln \frac{N_0}{\alpha} - 1 + \frac{\sigma_1^2}{2\lambda} \right] e^{-\lambda t} + \frac{\sigma_1^2}{4\lambda} (1 - e^{-2\lambda t})}$$

При $t \rightarrow \infty$ среднее значение стремится к $\alpha e^{1 - \frac{\sigma_1^2}{4\lambda}}$. Найдем значение α , при котором среднее значение процесса будет стремиться к общему числу потенциальных клиентов K :

$$\alpha e^{1 - \frac{\sigma_1^2}{4\lambda}} = K;$$

$$\alpha = K e^{\frac{\sigma_1^2}{4\lambda} - 1}.$$

Будем моделировать траектории $N(t)$ и среднее значение $\bar{N}(t)$ с учетом полученного выражения для α . На рисунке 2 показаны результаты моделирования $N(t)$ при разных параметрах λ .

В первом приближении, точку максимума прибыли t^* можно оценить, исследуя динамику клиентов $N(t)$, так как она будет лежать в окрестности момента времени, когда количество клиентов достигнет общего числа потенциальных клиентов, то есть $\bar{N}(t^*) = K$.

Найдем этот момент времени:

$$K = Ke^{\frac{\sigma_1^2}{4\lambda} - 1} e^{1 - \frac{\sigma_1^2}{2\lambda} + \left[\ln \frac{N_0}{\alpha} - 1 + \frac{\sigma_1^2}{2\lambda} \right] e^{-\lambda t} + \frac{\sigma_1^2}{4\lambda} (1 - e^{-2\lambda t})}$$

После преобразований можем прийти к следующему решению:

$$t^* = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2\lambda \ln \left(\frac{N_0}{\alpha e} \right)}{\sigma_1^2} + 1 + \sqrt{\frac{4\lambda^2 \ln^2 \left(\frac{N_0}{\alpha e} \right)}{\sigma_1^4} + \frac{4\lambda \ln \left(\frac{N_0}{\alpha e} \right)}{\sigma_1^2} + 3} \right)$$

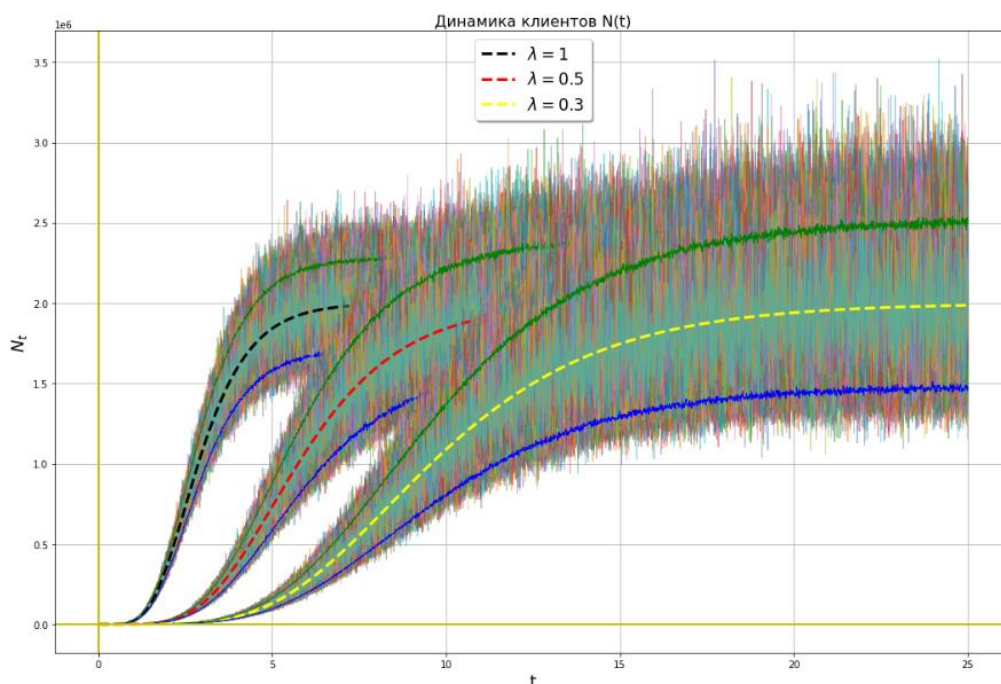


Рисунок 2 - Динамика клиентов $N(t)$ при разных параметрах λ , построенных с помощью точного решения; черная, зеленая и синяя штриховая линии обозначают средние процессы $\bar{N}(t)$ при $\lambda = 1$, $\lambda = 0,5$ и $\lambda = 0,3$ соответственно.

На рисунке 3 показана оценка t^* при разной интенсивности λ .

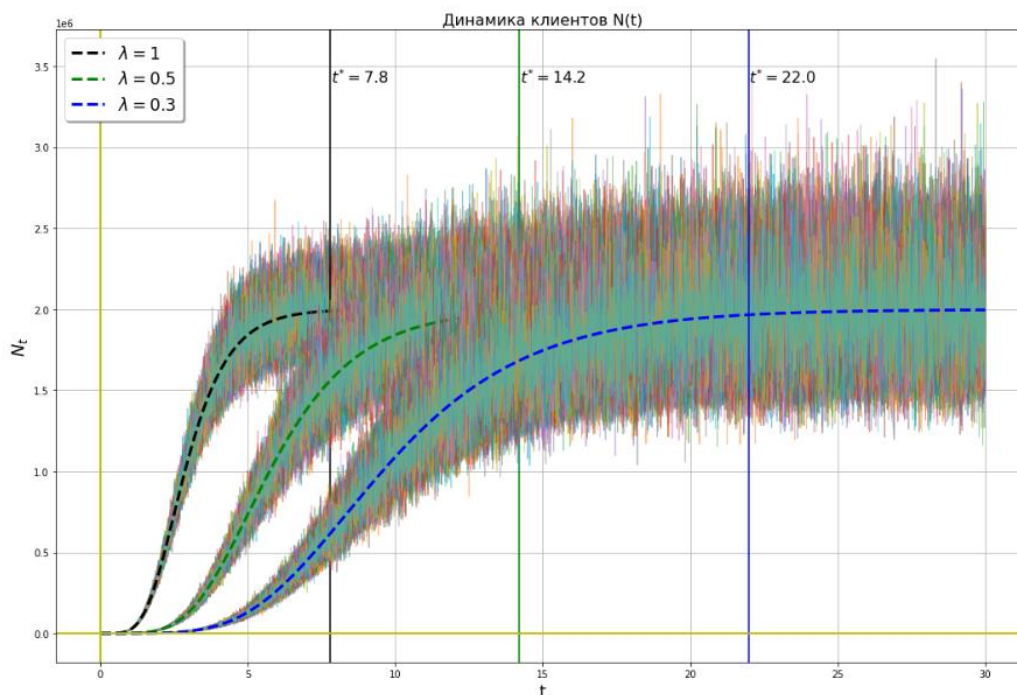


Рисунок 3 - Динамика клиентов $N(t)$ при разных параметрах λ , построенных с помощью точного решения; черная, зеленая и синяя штриховая линии обозначают средние процессы $\bar{N}(t)$ при $\lambda = 1$, $\lambda = 0,5$ и $\lambda = 0,3$ соответственно; вертикальные черная, зеленая и синяя линии показывают точки достижения общего числа потенциальных клиентов

Выводы

В результате работы было продемонстрировано два подхода к моделированию динамики численности клиентов финансовой пирамиды:

- за счет рекламной компании, учитывающей общительность клиентов и затраты на рекламу;
- и посредством логарифмического процесса Орнштейна-Уленбека, параметр интенсивности которого влияет на приток клиентов.

Для проведения экспериментов реализована программа, которая позволяет моделировать прибыль финансовой пирамиды и численность клиентов с помощью СДУ в форме ито-процессов. Одна модель решена с помощью неявной схемы SADISRK2, динамика клиентов второй – с помощью точного решения логарифмического процесса Орнштейна-Уленбека. В заключении была предложена оценка для параметра t^* .

Дальнейшие работы могут быть связаны с уточнением функционального вида расходов на рекламу α_1 и общительности клиентов α_2 . С другой стороны, можно разработать модель для определенного набора типов вкладов, что позволит перенести некоторые случайные факторы в функцию сноса, однако сложность модели может существенно возрасти. Также можно учесть, что число участников и количество вкладов не совпадают в общем случае, так как каждый участник может использовать одновременно несколько типов вкладов, но это может быть частью случайных факторов.

Список источников

1. Коваленко А.В. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамидой. Часть 3. Непрерывные модели / А.В. Коваленко, М.Х. Уртенев, Р.Х. Чагаров // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №08(82). – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/31.pdf>, 0,813 у.п.л.
2. Дубовский С. В. Обменный курс рубля как результат денежной эмиссии, внешней торговли и блуждающих финансовых потоков // Экономика и математические методы, 2002, том 38, № 2, с. 84-96.
3. Новиков А.К. (2021). Математическое моделирование процессов притока и оттока капитала в структуре финансовой пирамиды и реализация модели на ЭВМ. 41.
4. Huynh, Duy & Dau, Son & Li, Xiaodong & Luong, Phuc & Viterbo, Emanuele. (2023). Improving Robustness and Accuracy of Ponzi Scheme Detection on Ethereum Using Time-Dependent Features.
5. Aljofey, A., Jiang, Q., Qu, Q. (2022). A Supervised Learning Model for Detecting Ponzi Contracts in Ethereum Blockchain. In: Tian, Y., Ma, T., Khan, M.K., Sheng, V.S., Pan, Z. (eds) Big Data and Security. ICBDS 2021. Communications in Computer and Information Science, vol 1563. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-0852-1_52.
6. Samsudin, Adam & Rosli, Nurul & Ariffin, Noor Amalina. (2017). Stability analysis of explicit and implicit stochastic Runge-Kutta methods for stochastic differential equations. Journal of Physics: Conference Series. 890. 012084. 10.1088/1742-6596/890/1/012084.

References

1. Kovalenko A.V. Matematicheskoe modelirovanie dejatel'nosti finansovoj piramidoj. Chast' 3. Nепreryvnye modeli / A.V. Kovalenko, M.H. Urtenov, R.H. Chagarov // Politematicheskij setevoy jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyj zhurnal KubGAU) [Jelektronnyj resurs]. – Krasnodar: KubGAU, 2012. – №08(82). – Rezhim dostupa: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/31.pdf>, 0,813 u.p.l.

2. Dubovskij S. V. Obmennyj kurs rublja kak rezul'tat denezhnoj jemissii, vneshnej trgovli i bluzhdajushhih finansovyh potokov // *Jekonomika i matematicheskie metody*, 2002, tom 38, № 2, s. 84-96.

3. Novikov A.K. (2021). Matematicheskoe modelirovanie processov pritoka i ottoka kapitala v strukture finansovoj piramidy i realizacija modeli na JeVM. 41.

4. Huynh, Duy & Dau, Son & Li, Xiaodong & Luong, Phuc & Viterbo, Emanuele. (2023). Improving Robustness and Accuracy of Ponzi Scheme Detection on Ethereum Using Time-Dependent Features.

5. Aljofey, A., Jiang, Q., Qu, Q. (2022). A Supervised Learning Model for Detecting Ponzi Contracts in Ethereum Blockchain. In: Tian, Y., Ma, T., Khan, M.K., Sheng, V.S., Pan, Z. (eds) *Big Data and Security. ICBDS 2021. Communications in Computer and Information Science*, vol 1563. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-0852-1_52.

6. Samsudin, Adam & Rosli, Nurul & Ariffin, Noor Amalina. (2017). Stability analysis of explicit and implicit stochastic Runge-Kutta methods for stochastic differential equations. *Journal of Physics: Conference Series*. 890. 012084. 10.1088/1742-6596/890/1/012084.