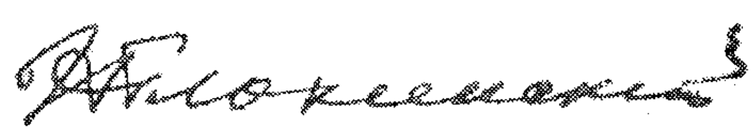


МОСКОВСКОЕ ОБЩЕСТВО ИСПЫТАТЕЛЕЙ ПРИРОДЫ

Н. А. ПЛОХИНСКИЙ

АЛГОРИТМЫ БИОМЕТРИИ

Под редакцией и с предисловием
академика АН УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

2-е издание, переработанное и дополненное

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1980

УДК 578.087.1

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Ответственный редактор
Г. Н. ЗАЙЦЕВ

Рецензенты:
Канд. биол. наук Е. Н. РОДИНА,
И. А. НЕЧАЕВ

Плохинский Н. А.

Алгоритмы биометрии. Под ред. академика АН УССР Б. В. Гнеденко. М., Изд-во Моск. ун-та, 1980, 21004, 150 с., с ил. Библиография.

Второе издание содержит 60 алгоритмов (в первом издании их было 29) и пояснения к их применению. Алгоритмы относятся к пяти разделам современной биометрии: сводные характеристики признаков, теория репрезентативности, дисперсионный анализ, математические модели в биологии, информационные показатели в биологии.

Второе издание алгоритмов предназначается для специалистов биологического профиля, студентов и преподавателей университетов, а также производственным работникам в области сельского хозяйства.

П $\frac{21004-154}{077(02)-80}$ 130—80 1702060000

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы, связанные с содержанием и характером математического образования биологов, как никогда актуальны в наши дни. Исключительная сложность биологических явлений, с одной стороны, и всестороннее проникновение физико-химических и технических средств исследования, с другой, а также переход к изучению микробиологических и глобальных процессов, с третьей, неизбежно приводят к необходимости исследования математических методов в биологии. Необходимы более широкие представления о возможностях современной математики и систематическое совместное участие в решении больших актуальных биологических проблем биологов и математиков.

Как может математик понять, что необходимо в первую очередь дать биологу в качестве его математических знаний, если он не составил себе даже поверхностного представления о задачах биологической науки? Как может биолог требовать от математиков изложения тех или иных разделов математики, если он не представляет имеющиеся ее возможности?

Математическое образование биологов должно строиться на глубоко понятых и осмысленных потребностях биологической науки. Именно на этой базе должны строиться математические курсы на биологических факультетах. При этом полностью осуществляется замечательный тезис В. И. Ленина, согласно которому человеческое познание идет от живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике.

Нужно признаться, что в математических курсах для биологов, как правило, исчезает начальная и конечная фаза этой схемы познания и остается лишь голая средняя ее часть. В результате биолог не видит связи математических идей с теми задачами, решению которых он посвящает свою жизнь.

Существующая математическая литература для биологов у нас крайне бедна, в то же время потребность в ней огромна. Существующие учебники, к сожалению, очень абстрактны или малосодержательны.

На мой взгляд, математическое образование биологов должно помочь им в решении следующих задач:

1. Дать представление о смысле математических подходов, которые могут служить познанию количественных закономерностей в биологических явлениях.

2. Научить основам обработки биологических экспериментальных данных.

3. Приучить не бояться математически оформленных статей биологического содержания и критически относиться к принятым в них предпосылкам и использованному математическому аппарату.

4. Получить представление о принципах построения математических моделей биологических процессов.

5. Убедиться в полезности систематического делового сотрудничества с математиками, способными заинтересоваться исследованием биологических явлений. Эта программа совсем не предполагает превращения биолога в математика, а имеет целью вооружение биолога математическими методами.

Математические работы биолога Н. А. Плохинского достаточно близки по своим исходным позициям тем общим положениям, которые выдвигаются в настоящем предисловии.

Учебное пособие «Алгоритмы биометрии» посвящено описанию и объяснению вычислительных процедур, которые требуются при обработке статистических материалов применительно к биологическим задачам. Содержание «Алгоритмов» приспособлено к известным книгам автора: «Биометрия», «Руководство по биометрии», «Наследуемость» и расширяет ранее опубликованную книгу «Алгоритмы биометрии» (1967).

Предлагаемое пособие является в известном смысле завершением многолетних работ Н. А. Плохинского по использованию классических методов математической статистики и теории вероятностей в биологических исследованиях.

Книга удовлетворяет настоятельные потребности биологов и служит прекрасным подарком для многочисленных учеников и последователей Н. А. Плохинского.

Академик УССР, профессор МГУ
Б. В. ГНЕДЕНКО

ТВОРЧЕСКИЙ ПУТЬ НИКОЛАЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА ПЛОХИНСКОГО

(К 80-летию со дня рождения и 50-летию научной деятельности)

Предлагая вниманию читателя второе, значительно дополненное, издание «Алгоритмов биометрии», редакция сочла целесообразным одновременно предпослать ему также и краткий очерк творческого пути видного отечественного селекционера, генетика и биометрика Николая Александровича Плохинского, чем надеется хотя бы отчасти восполнить существенный пробел в научно-историческом разделе биометрической литературы.

Опубликованию научной биографии Николая Александровича Плохинского особенно содействовал тот факт, что в ней на редкость отчетливо прослеживается влияние огромного опыта и знание чисто практической работы в области зоотехнии на специфику впоследствии решаемых им творческих задач. Это отразилось не только на тематике последних, но и на методах изложения, для которых характерны предельная ясность и законченность, педагогическая доступность фактически для любого контингента читателей и всегда практическая целенаправленность, что во многом достигается удачным подбором и детальным рассмотрением многих примеров из практики.

Отечественная биология, наряду с другими крупными биометриками П. Ф. Рокицким и П. В. Терентьевым, во многом обязана также Н. А. Плохинскому тем, что биометрические методы в послевоенные годы начали возрождаться и снова успешно применяться в биологических науках. Учебники по биометрии Н. А. Плохинского были в то время первыми, по которым нынешнее поколение биологов изучало биометрические методы, и, надо признать, весьма удачными ввиду доступности изложения материала.

Николай Александрович Плохинский родился 1 декабря 1899 г. в селе Николо-Долгое Калужской области в семье директора школы Александра Ивановича Плохинского и учительницы той же школы Марьи Васильевны. Окончив с медалью в 1918 г. Калужское реальное училище, Николай Александрович начал свой трудовой путь в области практической зоотехнии на Петровской ферме (ныне Тимирязевской сельскохозяйственной академии) практикантом. А затем стал студентом первого курса академии. Однако из-за болезни вынужден был поступить на курсы зоотехников Наркомзема, где слушал лекции известных профессоров: Е. А. Богданова, М. И. Придорогина, Г. И. Гурина, М. М. Щепкина, А. Ф. Фортунатова, В. И. Харченко. По окончании курсов в 1920 г. был направлен в губземотдел Калужской области инструктором по скотоводству и назначен заведующим Володарского (бывший Гурьевский) племенного рассадника швицкого скота.

С 1921 по 1924 г. Николай Александрович был откомандирован в Московский зоотехнический институт, здесь он начал изучать методы вариационной статистики и на втором курсе сделал свой первый доклад на тему «Метод вариационных кривых».

Основные биометрические методы, известные в то время, а также новые графические приемы сравнения телосложения разных пород скота и методы текущего зоотехнического анализа материалов по мере их поступления Н. А. Плохинский применял на практике при обработке материалов экспедиционного обследования животноводства в Рязанской, Калужской областях, Кабардино-Балкарской и Удмуртской автономных областях и в Северном крае по рекам Печоре и Мезени. Результаты последней экспедиции были изданы в 1929 г. отдельной книгой — «Печорское скотоводство».

По окончании института он был оставлен аспирантом на кафедре Е. Ф. Лискуна, где в 1927 г. защитил работу «Пойменные скотоводства Калужской губернии», и был зачислен в 1928 г. сначала ассистентом, а затем доцентом на кафедру зоологии 2-го Московского государственного университета, где проработал до 1934 г., когда кафедра была преобразована в Педагогический институт им. В. И. Ленина и агрозоотехнические дисциплины были изъяты из учебного плана.

За время работы во 2-м МГУ Николай Александрович продолжал изучение теории вероятностей, математическую статистику и биометрию, что было использовано им в преподавательской работе в зоотехническом институте и на курсах по подготовке сельскохозяйственных специалистов племенного дела.

С 1934 по 1941 г. Николай Александрович стал научным сотрудником Всесоюзного института животноводства (ВИЖ), где широко применял различные биометрические методы для решения важных научно-практических задач животноводства. В частности им было организовано всесоюзное обследование результатов метизации крупного рогатого скота иностранными породами. Результаты этих работ опубликованы в журнале «Проблемы животноводства» № 3 за 1933 г. и № 1 за 1934 г. Им также был разработан общесоюзный стандарт на чистопородный крупный рогатый скот, предназначаемый для воспроизводства породы. Используя разнообразные биометрические методы: показатели простой и множественной, прямолинейной и криволинейной регрессии, измерение простой, частной и общей корреляции, установление степени трансгрессии (дискриминации) признаков, он разработал новые методы измерения скороспелости, определения убойного веса и оценки мясных качеств крупного рогатого скота.

В 1935 г. Н. А. Плохинскому была присуждена ученая степень кандидата сельскохозяйственных наук. В 1937 г. была издана его первая книга по биометрии «Статистические методы в зоотехнии», благожелательно встреченная советскими и зарубежными специалистами. Научную работу в ВИЖе Николай Александрович постоянно сочетал с педагогической, он читал курс биометрии для аспирантов и научных сотрудников ВИЖа, а также преподавал на многих курсах по переквалификации специалистов племенного дела.

В предвоенные годы как сотрудник ВИЖа участвовал в работах экспертной Комиссии ВСХВ и публиковал отчеты по результатам конкурсов в журнале «Советская зоотехния» № 4 и 5 за 1940 г.

В 1936 г. им начались вестись работы по остфризации ярославского скота, и лучшие ярослав-остфризские телята и производители участвовали в экспозиции ВСХВ 1939—40 г. В связи с эвакуацией ВИЖа в 1941 г. Н. А. Плохинский был переведен в зону Ярославского госплемрассадника ярославского скота зоотехником-селекционером и продолжал опыты по остфризации ярославского скота.

С 1943 по 1946 г. Н. А. Плохинский назначается на должность главного зоотехника в Народный комиссариат черной металлургии СССР, где приложил теорию и технику дисперсионного анализа к зоотехническим, агрономическим и биологическим исследованиям. Научно-практическая работа Николая Александровича Плохинского была высоко оценена Советским правительством: он был награжден медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941—1945 года».

В 1945—1946 гг. был утвержден доцентом на кафедре частного животноводства Московского пушно-мехового института.

С 1946 по 1958 г., работая старшим научным сотрудником во ВНИИ мясной промышленности, разработал биометрические методы оценки и стандартизации живого и убойного веса мясного скота, степени упитанности и перекорма скота. Для этих целей Н. А. Плохинский изобрел особый щуп для определения упитанности, а для определения размеров животных — особый курвиметр.

В 1958 г. Н. А. Плохинский был приглашен Сибирским отделением АН СССР для организации в г. Новосибирске Института цитологии и генетики лаборатории генетических основ селекции животных, заведующим которой он работал по 1962 г. С коллективом института им изучались вопросы изменчивости и наследуемости жирномолочности крупного рогатого скота. Результаты этих исследований нашли практическое применение при оценке производителей в планировании племенной работы. Результаты этих исследований отражены в пяти монографиях автора, в том числе: «Дисперсионный анализ» (1960), «Биометрия» (1961), «Наследуемость» (1964) и др.

С 1965 г. Н. А. Плохинский — профессор-консультант на кафедре генетики и селекции биологического факультета МГУ. Преподает основы биометрии, проводит семинары и многочисленные консультации по биометрии для биологов в организованном им кабинете биометрии, ведет активную исследовательскую и общественно-научную работу. В частности, он с 1957 г. — действительный член Московского общества испытателей природы, а начиная с 1962 г. постоянно избирается председателем Комиссии по применению математики в биологии. Под руководством и при непосредственном участии Николая Александровича проведено более двухсот заседаний комиссий, на которых заслушано и обсуждено множество интересных докладов; многие из них опубликованы в периодически издающихся сборниках под его редакцией.

В заключение мы от лица научной общественности пожелаем Николаю Александровичу дальнейших успехов в его столь плодотворной и активной научной деятельности и долгих лет жизни на благо биологической науки.

Редакция

БИБЛИОГРАФИЯ Н. А. ПЛОХИНСКОГО

1. Печерское скотоводство. Архангельск, 1929.
2. Использование импортных быков в СССР. — «Проблемы животноводства», 1933, № 3.
3. Большое внимание импортным быкам. — «Совхозная газета», 1933.
4. Результаты метизации беспородного скота импортными быками. — «Проблемы животноводства», 1934, № 1.
5. Разведение (глава в книге). — Справочник для МТС. М., Сельхозгиз, 1934.
6. Общесоюзный стандарт на крупный рогатый скот. — ОСТ/ВКС—6654. Крупный рогатый скот. М., Стандартгиз, 1934.
7. Измерение скороспелости крупного рогатого скота. — «Труды ВИЖа. «Генетика и селекция», 1934, т. 1.
8. Три метода прижизненного определения убойного веса крупного рогатого скота (в соавтор. с В. П. Мастеровой). — «Успехи зоотехнических наук», 1935.
9. Определение убойного веса при жизни (в соавтор. с В. П. Мастеровой). — «Проблемы животноводства», 1935, № 10.
10. Индекс мясности (в соавтор. с В. П. Мастеровой и И. П. Соломко). — «Проблемы животноводства», 1935, № 4.
11. Нужен ли нам индекс мясности? — «Проблемы животноводства», 1937, № 3.
12. Статистические методы в зоотехнии. (Учебник). М., Сельхозгиз, 1937.
13. Остфризация ярославского скота. — «Проблемы животноводства», 1937, № 6.
14. Лучшие ярослав-остфризские телята на ВСХВ. (в соавтор. с В. П. Мастеровой). — «Проблемы животноводства», 1938, № 8—9.
15. Ярославский скот на ВСХВ. — «Советская зоотехния», 1940, № 4.
16. Четыре выставки. — «Советская зоотехния», 1940, № 5.
17. Инструкция по организации свинооткорма. М., Наркомчермет СССР, 1945.
18. Инструкция по установлению планов надоя. М., Наркомчермет СССР, 1945.
19. Точные методы оценки скотосырья. — «Мясная и молочная промышленность СССР», 1947, № 7.
20. Стандартный живой вес крупного рогатого скота (в соавтор. с Е. И. Пановой). — «Мясная и молочная пром. СССР», 1947, № 9.
21. Основы точных методов оценки мясных качеств крупного рогатого скота. М., Пищепромиздат, 1948.

22. Таблицы для определения живого веса и убойного веса крупного рогатого скота по методу Н. А. Плохинского. Изд-ние Мин-ва лег. пищепрома СССР. М., Главмясо, 1953.
23. Новый метод определения степени перекорма и перепавшего состояния крупного рогатого скота. — «Мясная индустрия СССР», 1953, № 5.
24. Новые методы определения веса крупного рогатого скота. — «Труды ВНИИМП». М., 1954, т. 6.
25. Новые методы определения веса наполенности и полномясности крупного рогатого скота. — В сб.: Вопросы методики зоотехнических исследований. Киев, Изд-во АН УССР, 1956.
26. Биометрические методы анализа материалов зоотехнических исследований. — Там же, 1956.
27. Опыт работы Красноармейской скотозаготовительной конторы (в соавтор. с А. И. Клепиковым). М., Минмяспром СССР, 1956.
28. Как определить упитанность крупного рогатого скота. — «Молочное и мясное скотоводство», 1956, № 9.
29. Транспортировка скота в Саратовской области. — «Мясная индустрия», 1956, № 6.
30. Транспортировка скота на мясокомбинаты (в соавтор. с М. И. Талаевой). — Бюро техн. информации ВНИИМП, 1958.
31. Дисперсионный анализ — книга. Изд. СО АН СССР. Новосибирск, 1960.
32. Ошибки репрезентативности селекционного индекса. Изд-ние СО АН СССР. Новосибирск, 1960.
33. Оценка быков производителей по качеству потомства. Изд-ние СО АН СССР. Новосибирск, 1960.
34. Показатели наследуемости жирномолочности и обильномолочности крупного рогатого скота в племенных совхозах Сибири. — Тез. докл. Межвуз. конф. по эксперимент. генетике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1961.
35. Индекс производителя и его ошибка репрезентативности. — «Тез. докл. III совещ. по примен. математ. методов в биологии». Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1961.
36. Биометрия. Изд. 1-е. СО АН СССР. Новосибирск, 1961.
37. Наследуемость по отцам. Изд. СО АН СССР. Новосибирск, 1962.
38. Наследуемость. Изд. СО АН СССР. Новосибирск, 1964.
39. Биометрические методы в генетических исследованиях. — В сб.: Актуальные вопросы современной генетики. М., Изд-во Моск. ун-та, 1966.
40. Показатели силы влияния. — «Генетика», 1966, № 5.
41. Анализ расщеплений. — «Генетика», 1966, № 8.
42. Алгоритмы биометрии. Изд. 1-е. М., Изд-во Моск. ун-та, 1967.
43. Odziedziczalnosc Panstwowe Wydawnistwo. Warszawa, 1968.
44. Наследуемость и повторяемость. — В сб.: Генетические основы селекции животных. М., «Наука», 1969.
45. Руководство по биометрии для зоотехников. М., «Колос», 1969.
46. Дисперсионный анализ силы влияния. — В сб.: Новое в биометрии (ред.). М., Изд-во Моск. ун-та, 1970.
47. Биометрия. Изд. 2-е. Изд-во Моск. ун-та, 1970.
48. О селекции животных по количественным признакам. — «Животноводство», 1971, № 6.

49. О генетике количественных признаков. — «Цитология и генетика», 1971, № 6.
50. Математика наследственности. — «Новые книги за рубежом», 1971, № 5.
51. Математические проблемы в популяционной генетике. — «Новые книги за рубежом», 1971, № 8.
52. Математические методы в биологии (под ред. Н. А. Плохинского). М., Изд-во Моск. ун-та, 1972.
53. Движение групповой генетической информации. — В сб.: Математические методы в биологии. М., Изд-во Моск. ун-та, 1972.
54. Ошибки репрезентативности выборочной средней при множественной характеристике объектов. — Там же, 1972.
55. Достоверность разности малых долей. — Там же, 1972.
56. О формальном использовании математических методов в биологии. — В сб.: Вопросы генетики и селекции животных. Киев, 1974.
57. Ориентация и миграция птиц. М., «Наука», 1975.
58. Биометрический анализ данных кольцевания и хомингового прослеживания птиц. — В сб.: Ориентация и миграция птиц. М., «Наука», 1975.
59. Математическая модель хоминга голубей (в соавтор. с И. О. Маркеловой и А. В. Левиковым). Там же, 1975.
60. Некоторые факторы, влияющие на скорость полета голубей. (в соавтор. с А. Р. Сакаян, А. В. Левиковым). Там же, 1975.
61. Определение длины и направления перелета птиц по географическим координатам. Там же, 1975.
62. Биометрические методы (под ред. Н. А. Плохинского). М., Изд-во Моск. ун-та, 1975.
63. Критерий пригодности математических моделей. — В сб.: Биометрические методы. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975.
64. Спорные вопросы биометрии. Там же, 1975.
65. Достоверность различия двух процессов. Там же, 1975.
66. Биометрия в изучении хоминга в миграции птиц (в соавтор. с А. В. Левиковым и А. Р. Сакаян). — В сб.: Миграция птиц. Таллин, 1976.
67. Ошибки ориентации птиц при ближнем хоминге (в соавтор. с Л. В. Супрун). — «Научн. докл. Высш. школы. Биол. науки», 1976, № 5.
68. Методы современной биометрии (под ред. Н. А. Плохинского). М., Изд-во Моск. ун-та, 1978.
69. Информационные показатели в биологии. — В сб.: Методы современной биометрии. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978.
70. Математическое оснащение биологов. Там же, 1978.
71. Определение достоверности расхождения двух эмпирических распределений (в соавтор. с И. О. Маркеловой). Там же, 1978.
72. Математические методы в биологии. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978.

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритм есть систематизированное описание целенаправленной последовательности действий.

Алгоритмы предлагаемого справочника описывают форму, последовательность и формулы, необходимые для получения наиболее часто используемых биометрических показателей.

В настоящее время во многих разделах биологии применяются математические методы, модифицированные в соответствии со спецификой объектов и явлений жизни и с особенностями биологических исследований.

Вопросы о том, какие математические методы, когда и в какой форме надо применять, а также какой биологический смысл могут иметь возможные результаты расчетов, освещаются в теоретической части биометрии и решаются применительно к задачам каждого конкретного исследования. После решения этих вопросов приступают к практическому использованию избранных методов, т. е. к биометрической обработке первичных материалов.

Предлагаемый справочник имеет целью упорядочить, уточнить и упростить технику биометрических расчетов, необходимых при анализе результатов экспериментов, наблюдений и при использовании записей производственной отчетности.

Алгоритмы, приведенные в справочнике, относятся к методам, выбранным из большого арсенала современной математики (теории вероятностей, математической статистики и других разделов), как наиболее приемлемые для современных биологических исследований.

Большая трудность при составлении справочника заключалась в выборе унифицированных (хотя бы в пределах одного справочника) терминов и символов. Взять готовую единую систему оказалось невозможно, так как такой системы не существует. В математических работах используется много различных обозначений одних и тех же показателей, имеется семь различных символов для обозначения средней арифметической, девять различных символов — для суммы квадратов центральных отклонений, шесть различных терминов — для понятия «достоверность разности», пять различных терминов — для обозначения основного свойства всякой группы, состоят из неодинаковых объектов по изучаемому признаку.

Такое разнообразие символов и показателей легко объяснить тем, что для обозначений громадного количества математических показателей не хватает букв трех алфавитов — латинского, греческого и готического, поэтому невозможно каждому показателю присвоить особый символ. Математические школы и отдельные математики по-своему и, конечно, по-разному выходят из этого положения. Одни предпочитают обозначать символом M — среднюю, другие — квадрат среднего

Основные термины и символы, применяемые в биометрии

В справочнике	В работах других авторов
Признак — элементарная особенность каждого объекта в экстерьере, интерьере, конституции, анатомии, гистологии, физиологии, продуктивности	Величина случайная, переменная
Дата (результат измерения признака, его значение, его величина) V	Значение, приобретаемое случайной переменной, вариант V, X, x, y, a
Объем группы (число объектов в группе) n, N	Численность, объем группы n, N
Средняя величина признака $M=\Sigma V/n$ Генеральная средняя $\overline{M}$ Выборочная средняя $\widetilde{M}$	Среднее значение случайной переменной M, m, a, b, β, ε, $\bar{x}$
Разнообразие (наличие неодинаковых объектов в группе)	Изменчивость, колеблемость, рассеяние, вариабельность, и даже «разброс»
Сумма квадратов, дисперсия $C=\Sigma(V-M)^2$	Сумма квадратов центральных отклонений, сумма квадратов, дисперсия: $\Sigma(V-M)^2$, $\Sigma(x-\bar{x})^2$, Σx^2, S, SS, SO, SA, SAQ, CQ
Варианса, средний квадрат $\sigma^2=\dfrac{C}{n-1}$	Средний квадрат, дисперсия, девиата, варианса σ^2, S^2, ν^2, E, M, MQ, ES
Среднее квадратическое отклонение, сигма $\sigma=\sqrt{\dfrac{C}{n-1}}$ Генеральная сигма $\bar{\sigma}$, σ Выборочная сигма $\tilde{\sigma}$, S	Среднее квадратическое отклонение, стандарт σ, S, ν
Разность достоверна (между генеральными средними можно ожидать такое же различие, какое найдено между выборочными средними) — различие по знаку, по величине разности, по доверительным границам) $(\widetilde{M}_1>\widetilde{M}_2)\rightarrow(\overline{M}_1>\overline{M}_2)$	Разность существенна, надежна, значима, реальна, разница есть, «разность достоверна, т. е. реальна», выборки из разных генеральных совокупностей (?)
Разность недостоверна (получены неопределенные результаты) $(\widetilde{M}_1>\widetilde{M}_2)\rightarrow(\overline{M}_1\gtreqless\overline{M}_2)$	Разность несущественна и т. д. Выборки из одной генеральной совокупности (?)

квадратического отклонения. Одни обозначают дату (результат первичного измерения объекта) символом V, другие — символом x, хотя казалось бы, символ неизвестной величины или символ аргумента можно и не применять к величинам, которые известны с самого начала исследования и обычно рассматриваются не как аргументы, а, наоборот, как функция изучаемых аргументов — влияний.

В некоторых случаях абстрактные математические термины вводят биологов в заблуждение при изучении конкретных явлений. Например, обозначение неодинаковости объектов в группе термином «изменчивость» (обозначающим в биологии совсем другое явление) может привести к неправильному пониманию термина «наследуемость».

При составлении справочника пришлось ввести обозначения, которые не отражают какую-либо одну математическую систему терминов и символов (такой системы нет), но наиболее приемлемы для биологов и достаточно точно соответствуют биологической сущности явления или показателя.

Краткая сводка основных биометрических терминов и символов дается в прилагаемой табл.

ЧАСТЬ I
ПОЯСНЕНИЯ К АЛГОРИТМАМ

Алгоритмы 1—7. Расчет средней арифметической M и среднего квадратического отклонения (сигмы) σ.

Два основных групповых показателя — средняя арифметическая M и среднее квадратическое отклонение σ — дают меру среднего уровня и разнообразия признака у объектов, составляющих группу. Кроме того, эти показатели участвуют в образовании многих других биометрических величин: коэффициента вариации, нормированного отклонения, формул распределений, ошибок репрезентативности, коэффициентов корреляции, показателей силы и достоверности влияний в дисперсионном анализе, коэффициентов и уравнений регрессии и др.

Все способы расчета средней арифметической, суммы квадратов центральных отклонений (сумма квадратов, дисперсия) и среднего квадратического отклонения (сигма) исходят из основных формул, дающих точные результаты:

Средняя арифметическая $M = \frac{\Sigma V}{n}$.

Сумма квадратов: $C = \Sigma (V - M)^2 = \Sigma V^2 - \frac{(\Sigma V)^2}{n}$.

Средний квадрат (варианса)

$$\sigma^2 = \frac{C}{n-1}.$$

Сигма (среднее квадратическое отклонение)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (V-M)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{C}{n-1}} = \sqrt{\sigma^2}.$$

В этих формулах: V — дата, результат первичного измерения признака у каждого объекта группы; n — число объектов в группе, или объем группы.

По этим формулам можно вычислять M и σ без составления вариационных рядов во всех случаях для малых и больших групп. В последнем случае (для многочисленных групп) требуется достаточная счетная техника, позволяющая производить автоматическое сложение, вычитание, умножение, деление, а также комбинированные действия: деление произведения, сложение многих произведений без записи промежуточных результатов и др.

При отсутствии достаточной счетной техники основные формулы для многочисленных групп неудобны. В таких случаях вычисление M и σ ведется при помощи вариационного ряда по специальным рабочим формулам. Это сильно облегчает ручную счетную работу; при этом

происходит незначительное снижение точности конечных результатов. Описание формы, последовательности и формул расчета M и σ приведено в семи алгоритмах (1—7).

Алгоритм 8. Выравнивание эмпирических вариационных кривых по нормальному закону.

Показан способ выравнивания для тех случаев, когда эмпирическое распределение предположительно принято за случайную форму проявления закона нормального распределения, выраженного известной формулой Муавра — Лапласа — Гаусса:

$$p' = \frac{Nk}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Способ основан на применении значений ординат нормальной кривой $f(x)$ и рабочей формулы:

$$p' = \frac{Nk}{\sigma} \cdot f(x).$$

Значения $f(x)$ первой функции нормированного отклонения даны в табл. V.

Алгоритм 9. Выравнивание асимметричных и эксцессивных кривых распределения по способу Шарлье. Показаны расчеты показателей:

— асимметрии и его ошибки репрезентативности:

$$A = \frac{\Sigma p D^3}{n \sigma^3}, \quad m_A = \sqrt{\frac{6}{n}}$$

— эксцесса и его ошибки репрезентативности:

$$E = \frac{\Sigma p D^4}{n \sigma^4} - 3; \quad m_E = \sqrt{\frac{24}{n}} = 2m_A.$$

Приведена система расчетов теоретических рядов по Шарлье для асимметричных и эксцессивных распределений.

Алгоритмы 10, 11. Оценка различия распределений. Показано применение критерия Пирсона «Хи-квадрат» для сопоставления эмпирического распределения с теоретическим и нового алгоритма для сравнения двух эмпирических распределений. При составлении алгоритма 10 были учтены последние работы Ван дер Вардена о минимально допустимых теоретических частотах в зависимости от числа степеней свободы.

Следует заметить, что при сравнении эмпирических распределений с теоретическими (алгоритм 10) порядок порогов вероятности обратный по отношению к порядку этих порогов при сравнении двух эмпирических распределений. Это обстоятельство проиллюстрировано на табл. 1.

Алгоритм 12. Определение доверительных границ генеральных параметров M и P.

Следует заметить, что каждая из двух доверительных границ одной генеральной средней может иметь свое практическое значение. Например, при прогнозах урожая зерновых культур для большого массива на основе изучения пробных участков (выборок), возможный максимум может быть использован для планирования всех организационных мероприятий, а гарантированный минимум укажет на возможный валовой сбор зерна в первом приближении.

Таблица 1

Сравнение двух эмпирических характеристик $\widetilde{M}_1 - \widetilde{M}_2$; $\widetilde{\sigma}_1 - \widetilde{\sigma}_2$ — двух эмпирических распределений (алгоритм 11)	Пороги вероятности безошибочных прогнозов	Сравнение эмпирической характеристики с теоретической $\widetilde{M} - \overline{M}$; $\widetilde{\sigma} - \overline{\sigma}$ Сравнение эмпирического распределения с теоретическим (алгоритм 10)
Ответственность высокая	$\beta_3 = 0{,}999$	Ответственность пониженная
Ответственность повышенная	$\beta_2 = 0{,}99$	Ответственность обычная
Ответственность обычная	$\beta_1 = 0{,}95$	Ответственность повышенная

Алгоритмы 13—18. Оценки выборочных разностей по их отношению к генеральным разностям. Достоверная выборочная разность правильно репрезентирует генеральную разность.

Недостоверная разность не дает никакого ответа об отношениях генеральных средних $\overline{M}_2—\overline{M}_1$ или генеральных долей $P_2—P_1$.

В алгоритме 13 дана схема понятий достоверности и приведены три порога вероятности безошибочных и ошибочных прогнозов.

Критерии достоверности разности средних описаны в трех алгоритмах: **в алгоритме 14** приведен критерий Стьюдента, **в алгоритме 15** — критерий Фишера и **в алгоритме 16** — критерий Бейли.

Критерии достоверности разности долей приведены в двух алгоритмах: **в алгоритме 17** — критерий Стьюдента и **в алгоритме 18** — критерий «фи». Сущность каждого критерия и смысл его показателей приведены в тех же алгоритмах (13—18).

Определение достоверности разности между выборочной и генеральной долями (**алгоритм 19**) применяется при решении основных задач проверки гипотез: о принадлежности изучаемой группы к известной генеральной совокупности и о возможной величине генеральной доли.

Первая задача возникает обычно в таксономических исследованиях, вторая имеет большое распространение в работах по элементарному генетическому анализу и изучению популяций.

В конце этого алгоритма показан обратный порядок порогов вероятности безошибочных прогнозов отличия фактов от предполагаемых теоретических показателей.

Чтобы правильно интерпретировать результаты расчетов **по алгоритмам 18—19**, необходимо усвоить следующие основные положения теории репрезентативности выборочных исследований.

РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТЬ ВЫБОРОЧНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Привлечение объектов для исследования можно проводить двумя основными методами. Можно подвергнуть изучению всех особей определенного массива или только их часть, выбранную определенным образом.

В первом случае проводится сплошное обследование всей генеральной совокупности, во втором случае производится выборочное исследование.

ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ

Весь массив особей определенной категории называется генеральной совокупностью. Объем генеральной совокупности определяется задачами исследования.

Обычно генеральная совокупность включает очень большое число объектов изучаемой категории. Объем таких генеральных совокупностей считается равным бесконечности.

Иногда изучаются и небольшие генеральные совокупности, например группа животных, закрепленных за определенными работниками, с целью сравнения достижений этих работников. В таких случаях генеральной совокупностью будет совсем небольшое количество особей, которые все исследуются.

ВЫБОРКА

Выборка — это группа объектов, отличающаяся тремя особенностями:

1) это часть генеральной совокупности;
2) отобранная в случайном порядке, определенным образом;
3) исследуемая для характеристики как отобранных объектов, так и всей генеральной совокупности.

Для того чтобы по выборке можно было получить правильную характеристику всей генеральной совокупности, необходимо организовать правильный случайный отбор объектов из генеральной совокупности.

Теорией и практикой разработано несколько систем отбора особей в выборку. Общим для всех этих систем может быть стремление обеспечить одинаковую вероятность выбора любого объекта из генеральной совокупности. Тенденциозность, предвзятость при отборе объектов для выборочного исследования препятствуют получению правильных общих выводов, делают результаты выборочного исследования непоказательными для всей генеральной совокупности, т. е. нерепрезентативными.

Числовые характеристики групповых свойств для генеральной совокупности называются генеральными параметрами, а для выборок — выборочными показателями.

РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТЬ

Репрезентативность — это основное свойство выборочных групп характеризовать соответствующие генеральные совокупности с определенной точностью и достаточной надежностью.

ОШИБКИ РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТИ

Ошибки репрезентативности возникают только по одной причине: вследствие того, что целое характеризуется на основе исследований одной только части этого целого.

Ошибки репрезентативности нельзя смешивать с другими — организационными ошибками, допускаемыми иногда при проведении экспериментов, наблюдений и при анализе материалов производственной отчетности. Организационные ошибки это — методические ошибки, ошибки точности, ошибки внимания и ошибки типичности; обычно они могут быть устранены правильным и тщательным проведением исследования или во всяком случае могут быть сведены к минимуму.

Но организационные ошибки не могут быть ни учтены, ни обезврежены никакими математическими приемами обработки уже полученного первичного материала.

Ошибки репрезентативности резко отличаются от четырех видов организационных ошибок. Ошибки репрезентативности, во-первых, могут быть устранены биометрическими методами и, во-вторых, не могут быть учтены при самой правильной и тщательной организации исследования (за исключением перехода на сплошное обследование генеральной совокупности).

При всей неизбежности ошибок репрезентативности их можно свести к минимуму путем привлечения в выборку достаточного числа объектов. Кроме того, величину ошибок репрезентативности можно определить с достаточным приближением на основе анализа выборочных данных и учесть при оценке генеральных параметров с требуемой точностью и надежностью.

Биометрические методы учета ошибок репрезентативности дают возможность:

1) определять доверительные границы генеральных параметров и

2) определять достоверность выборочных разностей.

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ

Оценка генеральных параметров производится особым способом, в форме определения двух их возможных значений — минимально возможного и максимально возможного. Эти крайние значения, в пределах которых может находиться искомая величина генерального параметра, называются доверительными границами.

Доверительные границы любого генерального параметра определяются по следующему общему правилу.

Генеральный параметр может отличаться от выборочного показателя не более чем на величину t-кратной ошибки репрезентативности выборочного показателя.

Это можно выразить следующими общими формулами:

$$\bar{A} = \tilde{A} \pm \Delta$$

где $\bar{A}$ — генеральный параметр,

$\tilde{A}$ — выборочный показатель,

t — критерий надежности, или показатель вероятности того, что величина генерального параметра действительно будет внутри доверительных границ и не выйдет за эти границы.
Величина показателя надежности устанавливается при планировании исследования.

$m_{\tilde{A}}$ — ошибка репрезентативности выборочного показателя, или показатель точности оценки генерального параметра. Рассчитывается по выборочным данным.

$\Delta - tm_{\tilde{A}}$ — абсолютная погрешность оценки генерального параметра при данной точности и надежности.

ОБЩИЙ ПОРЯДОК ОЦЕНКИ ГЕНЕРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

В форме доверительных границ может оцениваться любой генеральный параметр:

1. Генеральная средняя $\bar{M}$.

2. Генеральная доля P. Доля равна отношению числа плюсовых объектов (обладающих изучаемым признаком) к общему числу обследованных объектов. Например, если в стаде всего имеется $n=500$ овец и из них $a=200$ тонкорунных, то доля таких овец (плюсовых объектов) равна:

$$P = \frac{a}{n} = \frac{200}{500} = 0{,}40 = 40\,\%.$$

Доля остальных — $q=1-p=1-0{,}40=0{,}60=60\%$. Выборочная доля обозначается символом p, генеральная — P.

3. Генеральная разность d_i.

Три величины, необходимые для оценки генерального параметра, — выборочный показатель (A), критерий надежности (t), показатель точности (m) — определяются следующим образом.

Выборочный показатель (A) рассчитывается по выборочным материалам способами, описанными в учебниках по математической статистике.

НАДЕЖНОСТЬ

Надежность — это вероятность того, что генеральный параметр действительно окажется внутри доверительных границ.

Критерий надежности определяется заранее, при планировании исследования, исходя из представления о бо́льшей или ме́ньшей ответственности возможных результатов работы. Критерий надежности — это показатель вероятности безошибочных прогнозов.

Практика биологических исследований, проводившихся с помощью биометрии, выработала четыре порога вероятности безошибочных прогнозов: 0,90, 0,95, 0,99, 0,999.

Для достаточно больших выборок величина критерия надежности связана с этими четырьмя порогами вероятности определенным образом табл. 2.

Таблица 2

Четыре порога вероятности безошибочных прогнозов (надежности)

Порог	Применение порога	Вероятность безошибочных прогнозов (надежность)	Показатель надежности для больших выборок	Минимальный объем больших выборок
0	Понижение требования надежности в грубо-ориентировочных исследованиях трудно измеряемых признаков	$\beta_0 = 0{,}90$	$t_0 = 1{,}645 \approx 1{,}6$	$n \geqslant 20$
1	Обычные требования надежности в большинстве биологических исследований	$\beta_1 = 0{,}95$	$t_1 = 1{,}960 \approx 2{,}0$	$n \geqslant 30$
2	Повышенные требования надежности при проверочных опытах и в экономических работах	$\beta_2 = 0{,}99$	$t_2 = 2{,}576 \approx 2{,}6$	$n \geqslant 100$
3	Высокие требования надежности при проверке гипотез при разрешении спорных вопросов и при исследовании вредных и ядовитых веществ	$\beta_3 = 0{,}999$	$t_3 = 3{,}291 \approx 3{,}3$	$n \geqslant 200$

Для выборок, объем которых меньше указанного в таблице, значения определяются для каждого из четырех порогов вероятности по таблице критерия Стьюдента (табл. VII).

Критерии Стьюдента используются при установлении доверительных границ генеральных параметров и для определения достоверности разности.

ТОЧНОСТЬ

Точность — это степень приближения выборочного показателя к генеральному параметру при определенной надежности оценки.

П о к а з а т е л ь т о ч н о с т и, и л и о ш и б к а р е п р е з е н т а т и в н о с т и выборочного показателя, определяется на основе выборочных данных по специальным формулам. Краткая сводка этих формул для некоторых показателей приведена в табл. 3.

Таблица 3

Формулы ошибок репрезентативности

Показатель	Формула
1. Ошибка средней арифметической:	
— при бесконечной генеральной совокупности	$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
— при конечной генеральной совокупности, если объем выборки составляет не менее 1/5 от объема генеральной совокупности	$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$
2. Ошибка доли:	
— если генеральные доли неизвестны	$m_p = \sqrt{\frac{pq}{n-1}}$
— если генеральные доли известны	$m_p = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$
— если в выборке получено $p = 0$ или $p = 1$	$m_{(p=0)} = m_{p=1} = \frac{1}{n+1}$
3. Ошибка разности средних арифметических	$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$
4. Ошибка разности долей	$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$
5. Ошибка разности между выборочной и генеральной долями	$m_{p-P} = m_p = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$

Необходимо обратить внимание на правильную интерпретацию понятия достоверности и, особенно, достоверности разности.

ДОСТОВЕРНОСТЬ

Достоверность — это особое свойство хорошо организованных выборок правильно отражать генеральные параметры.

Достоверная разности двух выборочных показателей правильно характеризует искомую генеральную разность между соответствую-

щими генеральными параметрами. В указанном смысле выборочная разность может быть достоверна или недостоверна.

Легко понять, что значит, что разность достоверна. Это значит, что если в выборочном исследовании оказалась разница между выборочными показателями, то такая же разница по знаку будет и между соответствующими генеральными параметрами и основной вывод исследования может быть обобщен и перенесен на соответствующие генеральные совокупности.

Труднее понять, что означает, что разность недостоверна. Очень распространено ошибочное мнение, что наличие в выборках недостоверной разности свидетельствует об отсутствии разницы между генеральными параметрами. Такое правило не имеет никаких ни теоретических, ни практических оснований.

Если получена недостоверная разность между выборочными показателями, то это значит, что не получено никакого определенного ответа о разности между соответствующими генеральными параметрами и можно иллюстрировать следующей формулой:

$$(\tilde{M}_1 > \tilde{M}_2) \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \overline{M}_1 > \overline{M}_2 \\ \overline{M}_1 = \overline{M}_2 \\ \overline{M}_1 < \overline{M}_2 \end{matrix} \right\}$$

При недостоверной выборочной разности ничего нельзя заключить с заданной надежностью о генеральной разности: ни того, что она есть, ни того, что ее нет, ни того, что она больше или меньше нуля, ни того, что она равна нулю.

Имеется и другое неправильное толкование понятий: достоверная разность между выборочными показателями свидетельствует якобы о том, что выборки взяты из разных генеральных совокупностей, а недостоверная разность — о выборках, взятых из одной генеральной совокупности. Легко понять неприемлемость таких указаний для биологов.

Биолог всегда сравнивает различные, неодинаковые для него генеральные совокупности: разные виды, сорта, породы, разные совокупности по полу, возрасту, подвергавшиеся и не подвергавшиеся воздействиям, разные совокупности по времени их исследования.

То что это разные совокупности — определено еще до исследования и уже не требует выяснения ни в процессе исследования, ни по его результатам. Чтобы ни получилось в результате выборочного исследования, генеральные совокупности всегда останутся разными. Только в одних случаях будет установлено их достоверное различие по изучаемому параметру, а в других случаях ничего не будет установлено: ни того, что эти разные генеральные совокупности имеют различные параметры (например средние), ни того, что эти разные генеральные совокупности по данному параметру не различаются.

КРИТЕРИЙ ДОСТОВЕРНОСТИ РАЗНОСТИ

При том большом значении, которое имеет для исследователей получение достоверных (или недостоверных) разностей, появляется настоятельная потребность овладеть методами, позволяющими определить: достоверна ли полученная, реально существующая выборочная разность или при всей ее материальной действительности она не достоверна в описанном правильном понимании.

Достоверность выборочной разности измеряется особым показателем, который можно назвать критерием достоверности разности.

Критерий достоверности разности равен отношению выборочной разности к ее ошибке репрезентативности и определяется по формуле:

$$t_d = \frac{d}{m_d} \geqslant t_{st}, \text{ при } \nu = n_1 + n_2 - 2,$$

где $d = M_1 - M_2$ — разность выборочных показателей;

$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$ — ошибка выборочной разности;

$m_1 m_2$ — ошибки репрезентативности сравниваемых выборочных показателей;

t_{st} — стандартное значение критерия, определяемое по таблице критериев Стьюдента для каждого порога надежности в зависимости от числа степеней свободы;

$n_1 n_2$ — численности сравниваемых выборок.

При использовании критерия достоверности возможны два основных случая.

$t \geqslant t_{st}$ — полученный в исследовании критерий достоверности разности равен или превышает стандартное значение критерия, найденное по Стьюденту.

В этом случае разность достоверна с определенной надежностью, т. е соответствует по знаку генеральной разности (между генеральными параметрами).

Если эмпирический критерий равен или превышает стандартное значение нулевого порога, значит достоверность установлена с вероятностью не менее 0,90. В этом случае эмпирический критерий подчеркивается пунктиром.

Если эмпирический критерий равен или превышает первый порог, значит надежность не менее 0,95 и эмпирический критерий подчеркивается одной чертой.

Если эмпирический критерий равен или превышает второй или третий пороги, надежность равна соответственно $\beta_2 = 0{,}99$ и $\beta_3 = 0{,}999$, эмпирический критерий подчеркивается соответственно двумя или тремя чертами.

$t < t_{st}$ — полученный в исследовании критерий достоверности разности меньше стандартного значения для минимального или требуемого порога вероятности.

В этом случае разность недостоверна, что значит:

а) по выборочной разности нельзя сделать никакой оценки генеральной разности;

б) осталось невыясненным, какая из двух генеральных средних больше;

в) осталось недоказанным как наличие, так и отсутствие различия между генеральными средними.

За минимальный порог достоверности в подавляющем большинстве исследований принимается первый порог, соответствующий вероятности безошибочных прогнозов $\beta_1 = 0{,}95$.

Алгоритмы 20—24. Корреляционный анализ. Вычисления коэффициента корреляции для малых и больших групп без применения и с применением корреляционной решетки. Для больших групп показан модифицированный способ произведений.

Определение достоверности коэффициента корреляции рекомендуется в алгоритмах **20**, **22** проводить путем сравнения числа коррелируемых пар со стандартными объемами, определенными по фишеровскому показателю:

$$\breve{N} = \frac{t^2}{z^2} + 3;$$

где t — стандартное значение критерия Стьюдента для числа степеней свободы, равного числу коррелируемых пар без двух,

$$Z = \frac{1}{2}[\ln(1 + r) - \ln(1 - r)]$$

показатель, предложенный Фишером.

Значения стандартных объемов для любого коэффициента корреляции и трех порогов вероятности безошибочных прогнозов приведены в табл. IX.

В алгоритме 23 показан полный корреляционный анализ, который дает меру степени и достоверности прямолинейной и криволинейной связей признаков и заканчивается определением критерия криволинейности, что требует для выяснения путей дальнейшего регрессионного анализа.

В этом алгоритме описаны расчеты пяти показателей: показателя прямолинейной связи, критерия его достоверности, показателя криволинейной связи, критерия его достоверности и критерия криволинейности.

Символ F_{st} означает стандартные значения критерия Фишера. Значения этого критерия в зависимости от двух чисел степеней свободы для трех порогов вероятности безошибочных прогнозов приведены в табл. VI.

Полный корреляционный анализ необходим при изучении сопряженного разнообразия новых признаков, корреляция которых еще не изучалась или изучена недостаточно.

В других случаях, когда известно, что связь между признаками прямолинейна, или требуется выяснить меру только прямолинейной связи, можно ограничиться расчетом одного прямолинейного коэффициента корреляции.

В алгоритме 24 дана техника расчетов коэффициентов корреляции для качественных признаков — тетрахорического (по четырехпольной решетке) и полихорического.

Достоверность этих показателей (достаточная вероятность связи признаков в генеральном комплексе) определяется путем перевода их в критерий «Хи-квадрат» (табл. VIII).

Алгоритмы 25—36. Дисперсионный анализ. За основу алгоритмов дисперсионного анализа приняты следующие положения.

1. Основным показателем силы влияния следует считать отношение факториальной суммы квадратов к общей сумме квадратов:

$$\eta_x^2 = C_x / C_y \begin{cases} C_x = \Sigma (M_i - M_\Sigma)_n^2 \\ C_y = \Sigma (V - M_\Sigma)^2. \end{cases}$$

2. Попытки уточнить этот показатель, основанные на применении формул:

$$\eta^2 = 1 - \sigma_z^2/\sigma_y, \text{ или } \quad \eta^2 = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_z^2}{\sigma_x^2 + (n-1)\,\sigma_z^2}$$

не улучшают, а ухудшают определение силы влияния.

3. Показателем достоверности влияния может быть критерий Фишера $F = \sigma_x^2/\sigma_z^2$ или отношение основного показателя к его ошибке $F = \eta_x^2/m_\eta^2$ дает точно такие же значения, как и критерий Фишера.

Ошибка репрезентативности показателя силы влияния может определяться по формулам:

для однофакторных комплексов

$$m_{\eta_x^2} = (1-\eta_x^2)\,\frac{g-1}{N-g}\,;$$

для двухфакторных комплексов:

для суммарного влияния обоих факторов

$$m_{\eta_x^2} = (1-\eta_x^2)\,\frac{g_A\cdot g_B-1}{N-g_A\cdot g_B};$$

для остальных влияний

$$m_{\eta_i^2} = \eta_i^2\,\frac{\sigma_z^2}{\sigma_i^2} = \frac{\nu_i}{\nu_z}\cdot\eta_z^2.$$

Эта ошибка может быть использована для определения доверительных границ генерального параметра

$$\tilde{\eta}^2 = [(\eta^2-\Delta) \div (\eta^2+\Delta)];\ \ \Delta = F_{st}\cdot\tilde{m}_{\eta^2},$$

где F_{st} — стандартные значения фишеровского критерия, определяемого по двум степеням свободы для трех порогов вероятности безошибочных прогнозов по табл. VI.

Алгоритмы дисперсионного анализа даны для однофакторных и двухфакторных, пропорциональных, неравномерных комплексов, малых и больших групп, мало- и многозначных дат, количественных и качественных признаков.

Однофакторные комплексы используются для оценки силы и достоверности какого-нибудь одного влияния, которое выделяется из общей массы факторов как главное или требующее проверки.

Путем анализа однофакторных комплексов можно получить показатели наследуемости по отцам и матерям в потомстве одного отца. Градациями таких комплексов должны быть классы родителей (отцов или матерей) по изучаемому признаку или отдельные отцы, матери, а в градации следует включать детей каждого родителя или каждого класса родителей. Основной показатель силы влияния такого комплекса и есть соответствующий показатель наследуемости:

$$h^2 = \eta_x^2 \pm m_{\eta_x^2}.$$

Двухфакторные комплексы используются для оценки и сопоставления силы и достоверности влияния двух одновременно изучаемых факторов.

Факторы для таких комплексов подбираются независимые, например, порода и корм, сорт и удобрение, рентген и температура, первый и второй стимуляторы, неродственные отцы и матери и т. д.

При анализе двухфакторных дисперсионных комплексов определяется сила и достоверность пяти влияний:

1) первого фактора при усредненном влиянии второго фактора;
2) второго фактора при усредненном влиянии первого фактора;
3) сочетания градаций обоих факторов;
4) суммарного влияния обоих организованных факторов;
5) влияния всех остальных неорганизованных в исследовании факторов.

Влияние сочетаний градаций возникает вследствие того, что второй фактор обычно действует различно при разных градациях первого. То же наблюдается и в отношении первого фактора: его действие проявляется неодинаково при различных градациях второго фактора. Например, при изучении действия стимулятора линьки можно наблюдать, что введение стимулятора самкам дает большой эффект, а самцам — незначительный. Это разнообразие действий стимулятора при разных половых группах отразится на величине третьего показателя $\eta_{AB}^2 > 0$. Он будет больше нуля и тем больше, чем сильнее половые различия в восприятии действия стимулятора. Если же стимулятор действует одинаково на самцов и самок, то $\eta_{AB}^2 = 0$.

В алгоритмах двухфакторных комплексов примеры подобраны так, чтобы можно было видеть все типичные случаи различных значений показателя влияния сочетания градаций.

Алгоритм 36 относится к общим случаям организации дисперсионных комплексов. Этот алгоритм составлен так, что не требует дополнительных пояснений.

В алгоритмах 37—41 показаны новые методы сравнения течения двух процессов. Для правильного использования этих методов необходимо ознакомиться с их обоснованием.

В биологических исследованиях часто возникает необходимость сравнить течение двух изучаемых процессов и определить достоверность различия в их течении.

Потребность в такой оценке возникает во всех разделах биологии: возрастное развитие животных и растений двух пород, сортов, линий; реакция на усиливающиеся воздействия подопытных и контрольных групп; развитие особей одной категории в двух разных условиях жизни; нарастание частоты мутаций двух разных линий (видов, штаммов) под действием мутагена; затухание болезни при двух разных системах лечения; возрастание силы спортсменов при новой системе тренировки по сравнению со старой системой и т. д.

В любом случае сравнение двух процессов может проходить по двум показателям: по среднему уровню течения процессов и по расхождению направления процессов, т. е. по непараллельности или параллельности их течения.

Достоверность различий среднего уровня и непараллельности процессов может быть определена по особому варианту двухфакторного дисперсионного комплекса.

В таком комплексе первый фактор имеет всегда две градации (A_{I}, A_{II}), соответствующие двум сравниваемым процессам, а второй фактор имеет несколько (g) градаций — по числу доз воздействия, включая и нулевую ($B_1\ B_2\ B_3\ ...\ B_g$).

По каждой градации второго фактора имеются две частные средние: $M(A_{\text{I}})$ и $M(A_2)$, каждая пара частных средних дает одну разность: $d = M(A_1) - M(A_2)$, а всего получается разностей столько, на сколько градаций разбит второй фактор: $d_1, d_2, d_3, ..., d_g$.

Этот ряд разностей и есть основа для решений обоих вопросов оценки.

Достоверность различия среднего уровня процессов определяется как достоверность отличия от ноля средней разности частных средних

$$F_1 = t^2 = \left(\frac{M_d}{m_d}\right)^2 \geqslant F_{st}\begin{Bmatrix}\nu_1 = 1\\ \nu_2 = \nu_z\end{Bmatrix}.$$

Достоверность расхождения процессов, т. е. непараллельности их течения, определяется как достоверность отличия разнообразия частных разностей от разнообразия случайных отклонений.

Разнообразие частных разностей указывает на степень различия действия градаций первого фактора при разных градациях второго, что в двухфакторных дисперсионных комплексах измеряется вариансой «взаимодействия» факторов:

$$\sigma^2_{AB} = \frac{C_{AB}}{\nu_A \nu_B} \text{ при } g_A = 2;\ \nu_A = 2 - 1 = 1 \text{ и}$$

$$\sigma^2_{AB} = \frac{C_{AB}}{\nu_B}.$$

Таким образом, искомая достоверность определяется по критерию:

$$F_2 = \frac{\sigma^2_{AB}}{\sigma^2_z} \geqslant F_{st}\begin{Bmatrix}\nu_1 = \nu_A \cdot \nu_B = \nu_B = g - 1\\ \nu_2 = \nu_z = N - 2g\end{Bmatrix}.$$

Исходя из закономерностей двухфакторных дисперсионных комплексов и из того, что основой расчетов служит ряд частных разностей, можно составить формулы расчетов показателей следующим образом:

Средняя разность берется взвешенной оператором:

$$\omega = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}.$$

Поэтому взвешенная средняя разность определяется по формуле:

$$M_d = \frac{\Sigma\,\omega_d}{\Sigma\,\omega}.$$

Квадрат ошибки средней разности аналогичен квадрату ошибки средней из дат, только вместо знаменателя n берется знаменатель (в соответствии с весами разностей) $\omega = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}$ получается:

$$m^2_d = \frac{\sigma^2_z}{\Sigma\omega}.$$

Случайная варианса определяется так, как это делается в двухфакторных комплексах при числе степеней свободы:

$$\nu_z = N - g_A g_B = N - 2g,$$

$$\sigma^2_z = \frac{\Sigma V^2 - \Sigma h}{N - 2g}.$$

Таким образом, первый критерий равен:

$$F_1 = t^2 = \left(\frac{M_d}{m_d}\right)^2 = \left(\frac{\Sigma\omega\, d}{\Sigma\omega}\right)^2 \cdot \frac{\Sigma\omega}{\sigma^2_z} = \frac{(\Sigma\omega\, d)^2}{\sigma^2_z \cdot \Sigma\omega}.$$

Или, если величину $\frac{(\Sigma\omega\, d)^2}{\Sigma\omega}$ обозначить через T_1

$$F_1 = \frac{T_1}{\sigma^2_z} \geqslant F_{st}\begin{Bmatrix}\nu_1 = 1\\ \nu_2 = N - 2g\end{Bmatrix}.$$

Второй критерий — непараллельности — определяется исходя из того, что варианса «взаимодействия» равна сумме взвешенных квадратов центральных отклонений частных разностей от средней разности, причем эта сумма делится на число степени свободы $\nu_B = g - 1$,

$$F_2 = \frac{\sigma^2_{AB}}{\sigma^2_z} = \frac{\Sigma\omega\,(d - \bar{d})^2}{\nu_B\, \sigma^2_z} = \frac{\Sigma\omega\, d - \frac{(\Sigma\omega\, d)^2}{\Sigma\omega}}{(g-1)\cdot\sigma^2_z}.$$

Обозначая $\Sigma\omega\, d^2 = T_2$, а $\frac{(\Sigma\omega\, d)^2}{\Sigma\omega} = T_1$ можно получить рабочую формулу второго критерия:

$$F_2 = \frac{T_2 - T_1}{(g-1)\cdot\sigma^2_z} \geqslant F_{st}\begin{Bmatrix}\nu_1 = g - 1\\ \nu_2 = N - 2g\end{Bmatrix}.$$

Вывод обоих критериев различия двух процессов показан в алгоритме 37.

В алгоритмах 38—41 приведены рабочие алгоритмы расчетов двух критериев, а также определение достоверности влияния факторов B при протекании процессов A_{I} и отдельно — A_{II}. Алгоритмы даны для малых и больших комплексов и для признаков — количественных и качественных.

Алгоритм 41 дан для малых и больших долей ($p<0{,}2$; $p>0{,}8$). В нем использовано преобразование долей в углы «фи» по Фишеру. Перевод долей в углы «фи» $\left(\varphi = \frac{2\pi}{180} \cdot \arcsin\sqrt{p}\right)$ делается по специальной таблице (табл. X).

Преобразование «фи» упрощает и уточняет сравнение процессов не только для крайних, но и вообще для любых долей.

В алгоритмах 42—50 показаны способы расчета элементарных математических моделей для биологических процессов.

Математическая модель биологического процесса это описание процесса математическими средствами (формулы, таблицы, номограммы), дающее возможность вскрыть внешнюю форму протекания процесса и получить дополнительную информацию о деталях процесса и о возможных его прогнозах.

Математическая модель показывает изменения функции при изменениях одного или нескольких аргументов (факторов).

Функцией в данном случае называется признак, зависящий от другого признака — аргумента. Зависимость функции от аргумента может быть или физиологической, или условно принятой в исследовании.

Примером физиологической зависимости может служить зависимость веса животных (функция) от его возраста (аргумент).

Если по длине животного определяется его вес, то принимается, что вес есть функция длины, а если же необходимо предусмотреть размеры животных разного веса, то принимается, что длина есть функция веса. Это пример условной зависимости. Взаимоотношения между функцией и аргументом можно кратко выразить формулой:

$$y = f(x),$$

где признак у — есть функция признака x или $x_1 = f(x_2)$, т. е. первый признак есть функция второго.

Если исследуется действие одного аргумента (фактора), функция называется простой, а модель влияния — однофакторной:

$$y = f(x).$$

Если исследуется действие нескольких аргументов (факторов), функция называется множественной, а модель — многофакторной:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Если при любом значении аргумента (малом, среднем, большом) одинаковые его приращения вызывают (или имеют тенденцию вызывать) одинаковые приращения функции, то такая функция называется прямолинейной.

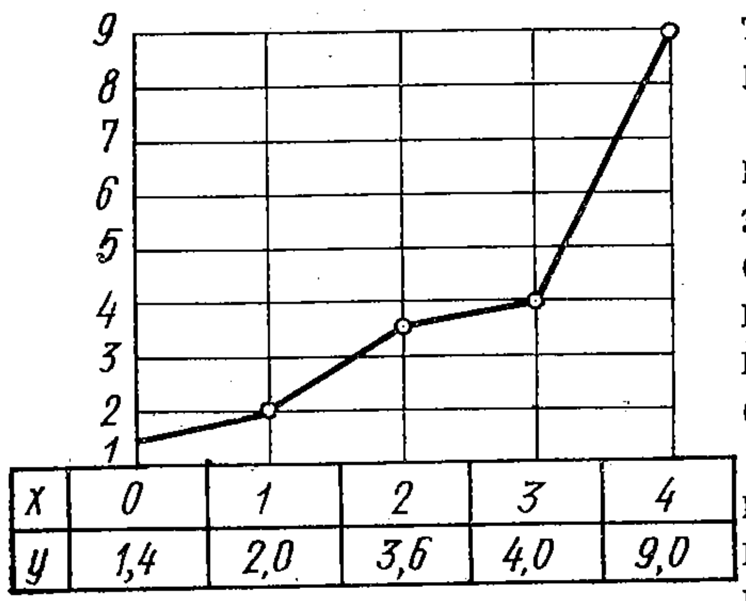


Рис. 1. Эмпирическая линия регрессии $y = f(x)$

Если при одинаковых приращениях аргумента, но при разных его значениях (малом, среднем, большом), функция имеет неодинаковые приращения, причем среднее течение изменений не идет по прямой, то такая функция называется криволинейной.

Первичное изображение функции может быть сделано при помощи эмпирического ряда регрессии, состоящего в простейшем случае из двух рядов, — ряда значений аргумента и ряда значений функции, что показано в табл. 4. Тут значения функции равны частным средним по градициям фактора. Графическое изображение течения функции в зависимости от изменений аргумента называется линией регрессии. Пример такой линии показан на рис. 1.

Таблица 4

Аргумент (фактор) x	0	1	2	3	4
Функция эмп. знач. y	1,4	2,0	3,6	4,0	9,0

Течение эмпирических линий регрессии почти никогда не бывает плавным. Ломаный характер этих кривых отражает прежде всего непостоянство напряжения всего комплекса условий и случайных влияний, при которых протекало развитие функции. Это непостоянство искажает внешнее проявление закономерности.

Обычно всякая закономерность бывает скрыта в большей или меньшей степени случайностями своего проявления. Основной задачей математических моделей нужно признать выявление закономерностей из хаоса случайностей.

Для выяснения основных форм зависимости функций от аргумента требуется освободиться от случайных искажений проявления зако-

номерности и выявить такое течение функции, которое соответствует усредненному напряжению всего комплекса условий развития функции.

Процесс получения усредненного течения функции при равномерном увеличении аргумента называется выравниванием эмпирических рядов. В результате такого выравнивания на основе эмпирической ломаной линии получается усредненная плавная теоретическая линия прямолинейной или криволинейной регрессии.

РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Регрессией называется изменение функции в зависимости от изменений одного или нескольких аргументов. Для изображения регрессии используется: ряд регрессий (эмпирический и теоретический), линия регрессии, коэффициент регрессии и уравнение регрессии.

Эмпирический ряд регрессии это — двойной ряд цифр, включающих значения аргумента и соответствующие средние величины функции. При графическом изображении ряда регрессии аргумент откладывается по оси абсцисс, а функция — по оси ординат.

Анализ эмпирической линии и регрессии дает практически ценную характеристику основных особенностей, связанных с зависимостью изучаемой функции от избранного аргумента.

Разбором особенностей изменения функции по отдельным участкам течения аргумента часто невозможно ограничиться. Требуется определить такое течение функции, которое было бы при усредненном, следовательно, одинаковом напряжении всего комплекса условий, определяющих развитие функции на всей амплитуде значений.

Процесс получения усредненного течения функции при равномерном усилении аргумента называется выравниванием эмпирических рядов. Выравнивание эмпирических рядов регрессии имеет большое и разностороннее применение.

Вскрывая усредненное течение функции, исследователь выявляет ту закономерность изучаемого явления, которая в эмпирическом ряду была скрыта случайностями своего проявления. Эта вскрытая закономерность, выраженная формулой или теоретическим рядом регрессии, помогает более точно, с меньшими ошибками дать описание внешних проявлений закономерности, что, в свою очередь, может помочь вскрытию и внутренних факторов, управляющих данным явлением. В этом и заключается познавательное значение исследований регрессии различных признаков. Результаты этих исследований имеют широкое применение и в практике.

Каждый выравненный ряд дает возможность определить значение функции при любом значении аргумента (или нескольких аргументов). Это обстоятельство дает возможность использовать ряды и уравнения регрессии при определении значений таких признаков, непосредственное измерение которых в обычных условиях или невозможно, или затруднительно.

В практических работах использование уравнений и линий регрессии получило широкое распространение при определении (без взвешивания) нормального живого веса животных и их убойного веса при жизни, веса сена в стогах, овощей в овощехранилищах, силосной массы в силосохранилищах, древесины в стволах и штабелях и др.

Широкое практическое применение во многих отраслях производства находит также специальная форма линий регрессии — номограмма.

Способ скользящей средней

Если форма функции не известна, то сгладить случайные изломы эмпирической кривой можно, применив способ простой скользящей средней. Этот способ заключается в том, что для каждого значения аргумента берут среднюю арифметическую из нескольких (соседних) значений функции.

Если скользящую среднюю берут по трем значениям аргумента, то складывают соседние значения функций для меньшего значения аргумента, для данного и для большего. Частное от деления этой суммы на три дает выравненное значение функции для данной величины аргумента.

Выравнивание эмпирического ряда методом простой скользящей средней показано в табл. 5.

Таблица 5

Выравниванне эмпирического ряда по способу простой скользящей средней

Аргумент (процент белка в рационе)	Функция (живой вес в возрасте шести месяцев, кг)	Сумма трех соседних значений живого веса телят	Выравненные значения живого веса
56	103	—	—
53	120	348	116
50	125	392	131
47	147	411	137
44	139	439	146
41	153	439	146
38	147	454	151
35	154	455	152
32	154	457	153
29	149	462	154
26	159	448	149
23	140	451	150
20	152	410	137
17	118	—	—

Графический способ

Графический способ дает возможность с достаточным приближением получить теоретическую линию, а затем и теоретический ряд регрессии без каких-либо вычислений.

Наиболее простым оказывается применение графического способа к прямолинейной регрессии. В этих случаях на график наносят сначала эмпирическую линию регрессии, затем между крайними выступами ломаной эмпирической линии проводят прямую таким образом, чтобы сумма расстояний теоретической прямой от точек эмпирической линии была бы наименьшей.

При известном навыке это можно сделать от руки, может помочь при этом натянутая нитка или прозрачная линейка с нанесенной прямой чертой. Натянутую нить располагают по среднему течению эмпирической линии и после нахождения наилучшего положения нитки на графике отмечают две крайние точки: для минимального и максимального значения аргумента. Теоретической линией регрессии будет прямая, соединяющая эти две точки.

По теоретической прямой можно определить числовые значения функции (ординаты), соответствующие определенным значениям аргумента (абсциссы).

Если регрессию нельзя считать прямолинейной, то графическое выравнивания эмпирической кривой также может быть проведено, но для этого необходимо иметь представление об общих закономерностях изменения функции.

При изучении возрастных изменений веса сельскохозяйственных животных требуется учитывать, что вес, увеличиваясь с возрастом, постепенно приближается к некоторому максимальному значению, после чего прирост прекращается и значение его остается примерно на одном максимальном уровне.

При графическом выравнивании возрастных изменений лактационных удоев нужно учитывать, что примерно до 6—7-й лактации обильномолочность коров с каждой лактацией увеличивается, затем начинает снижаться в связи с общим старением организма.

При выравнивании кривых регрессии веса по линейным размерам тела нужно иметь в виду, что по мере увеличения длины, ширины или обхвата тела вес увеличивается с возрастающей скоростью, вследствие чего кривая регрессии имеет вид линии, постепенно загибающейся кверху.

Точечный график

Графический анализ может быть проведен на основе индивидуальных значений без расчета средних значений эмпирического ряда — с помощью точечного графика.

Для составления точечного графика устанавливают две перпендикулярные шкалы: горизонтальную шкалу аргумента, идущую слева направо, и вертикальную шкалу функции, идущую снизу вверх. Ни аргумент, ни функция не разделяют на градации.

Каждую особь отмечают на графике точкой, положение которой определяется по абсциссе значением аргумента, а по ординате — значением функции. Получается вытянутое скопление точек, которое дает возможность провести приближенную теоретическую линию регрессии.

Преимущество такого графика заключается в том, что он наглядно показывает и среднее течение функции, и то разнообразие значений, которое характерно для данной функции при данном аргументе.

Коэффициент прямолинейной регрессии

Прямолинейная корреляция отличается тем, что при этой форме связи каждому из одинаковых изменений первого признака соответствует тоже одинаковое в среднем изменение другого признака, связанного с первым или зависящего от первого.

Та величина, на которую в среднем изменяется второй признак, при изменении первого на единицу измерения, называется коэффициентом регрессии. Рассчитывают его по формуле:

$$R_{2/1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1},\ r_{2/1},$$

где $R_{2/1}$ — коэффициент регрессии второго признака по первому;

σ_2 — среднее квадратическое отклонение второго признака, который изменяется в связи с изменением первого;

σ_1 — среднее квадратическое отклонение первого признака, в связи с изменением которого изменяется второй признак;

$r_{2/1}$ — коэффициент корреляции между первым и вторым признаком.

Ошибка коэффициента регрессии равна ошибке коэффициента корреляции, умноженной на отношение сигм:

$$m_R = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot m_r = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \sqrt{\frac{1-r^2}{N-2}}.$$

Критерий достоверности коэффициента регрессии равен критерию достоверности коэффициента корреляции:

$$t_R = t_r.$$

Уравнение прямолинейной регрессии

Коэффициент прямолинейной регрессии показывает, на сколько от своей средней отклоняется второй признак, если первый признак от своей средней отклонился на единицу измерения. Это можно выразить следующей формулой:

$$(V_2 - M_2) = R_{2/1}(V_1 - M_1).$$

Обозначая V_1 через x, V_2 — через y, $R_{2/1}$ — через b и произведя необходимые преобразования этого выражения, можно получить рабочую формулу прямолинейной регрессии:

$$y = a + bx,$$

$$a = M_y - bM_x,$$

$$b = R_{y/x}.$$

По этой формуле, зная значение x (аргумент), можно определить значение y (функция) без непосредственного его измерения. Аргумент x нужно помножить на коэффициент регрессии b и к полученному произведению прибавить (или отнять) свободный член a.

Уравнение регрессии может служить математической моделью процесса, так как описывает зависимость функции от аргумента математическим способом, и дает возможность получить дополнительные характеристики, которые невозможно выяснить без использования модельного уравнения.

Математическая модель биологических процессов может быть выражена тремя способами: формулой, таблицей и номограммой.

Для зависимости, показанной на рис. 1, три формы математической модели показаны на рис. 2.

Формула модели описывает основную закономерность и, кроме того, позволяет определять значения функции для любого значения аргумента, в том числе и для такого, который не изучался в эксперименте. Например, по номограмме (рис. 2) видно, что при $x=1{,}5$ и $y=2{,}3$. Кроме интерполяции в некоторых случаях возможна и экстраполяция, например, для $x=4{,}3$ $y=1{,}65-0{,}45 \cdot 4{,}3+0{,}543 \cdot 4{,}3^2=9{,}755$.

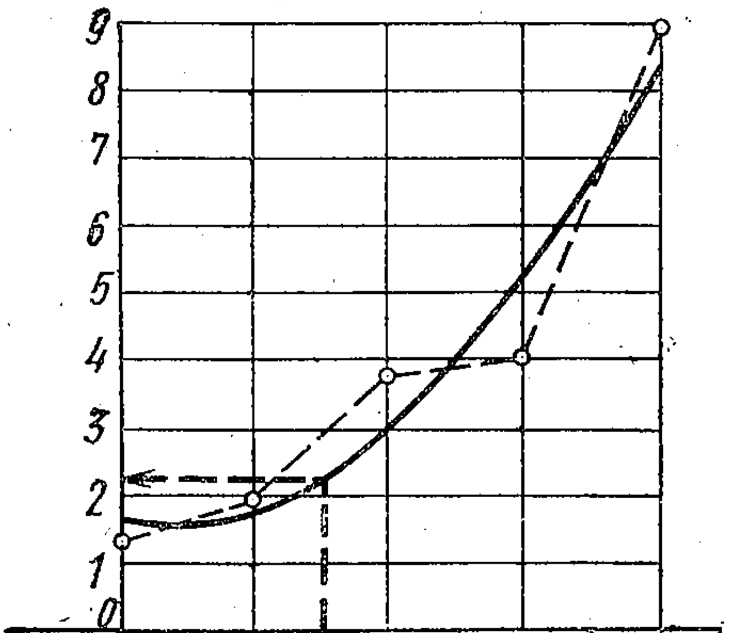
Таблица помогает найти значения функции без вычисления и без проведения линий на чертеже. При достаточно дробной интерполяции таблица очень удобна при практической необходимости часто определять значения функции для разных значений аргумента.

В природе существует множество биологических явлений, обусловленных множеством причин. Поэтому имеется очень много форм зависимости функции от различных аргументов.

Исследование внешних проявлений этих форм зависимости с помощью математических методов составляет основное содержание учения о регрессии признаков и о математических моделях в биологии.

Математическая модель помогает более точно и надежно дать описание внешних проявлений закономерности, что может способствовать нахождению их внутренних факторов, управляющих изучаемым процессом. В этом заключается познавательное значение исследований регрессии признаков и конструирования математических моделей и биологических процессов.

Результаты таких работ получили широкое практическое применение. Математические модели в форме формул, таблиц, номограмм используются для определения развития признаков, непосредственное измерение которых или невозможно, или затруднительно, например: прижизненное определение убойного веса скота, определение стандартного живого веса животных без взвешивания, вес сена в стогах по промерам, вес овощей в овощехранилищах без перевешивания всей массы, вес силосной массы по объему силоса, объем и вес древесины по длине и обхвату деревьев.



x	0	1	2	3	4
y''	1,7	1,7	2,9	5,2	8,5

Рис. 2. Математическая модель функции $y=f(x)$
Формула: $y''=1{,}65-0{,}45\,x+0{,}543\,x^2$
Таблица. Номограмма
Тонкий пунктир — эмпирические значения. Полужирный пунктир — определение функции при $x=1{,}5$; $y=2{,}3$

Разработано много способов расчета математических моделей. В биологических исследованиях наибольшее применение, кроме общего способа наименьших квадратов, может найти способ Чебышева и некоторые частные способы анализа S-образных (логистических), периодических, показательных функций. Описание сложных моделей популяционных процессов не входит в задачи «Алгоритмов биометрии», так как теоретические основы и методические приемы таких моделей еще не доведены до стадии создания практического алгоритма.

Способ наименьших квадратов

Наиболее общим аналитическим способом выравнивания эмпирических рядов регрессии служит способ наименьших квадратов. Этим способом получаются такие выравненные значения функции, квадраты отклонения которых от эмпирических значений дают наименьшую сумму.

Этим способом можно выравнивать функции прямолинейные и криволинейные, простые и множественные. Выравнивание ведется по следующим этапам:

1. Определение общей структуры уравнения регрессии (математической модели) проводится на основе предварительного анализа при-

чин, определяющих течение функции, или на основе рассмотрения эмпирической кривой. Например: $y=a+bx+cx^2$.

2. Составление системы нормальных уравнений производится по следующим правилам:

— Исходное уравнение изображается так, чтобы функция (y) была в правой части: $a+bx+cx^2=y$.

— Все члены уравнения умножаются на величины, стоящие рядом с искомыми коэффициентами: на 1, на x и на x^2

$$(\times 1)\ ga + bx + cx^2 = y,$$

$$(\times x)\ ax + bx^2 + cx^3 = yx,$$

$$(\times x^2)\ ax^2 + bx^3 + cx^4 = yx^2.$$

— В каждом члене уравнения ставится знак суммирования (Σ), причем искомые коэффициенты выносятся за этот знак. $\Sigma 1=g$ — число пар значений аргумент-функция:

$$ag = b\,\Sigma x + c\,\Sigma x^2 = \Sigma y.$$

$$a\,\Sigma x + b\,\Sigma x^2 + c\,\Sigma x^3 = \Sigma\, yx$$

$$a\,\Sigma x^2 + b\,\Sigma x^3 + c\,\Sigma x^4 — \Sigma\, yx^2.$$

— Определение числового значения сумм, входящих в нормальные уравнения, путем суммирования предварительно вычисленных рядов: Σx, Σx^2, Σx^3, Σx^4, Σy, Σyx, Σyx^2.

Пример: Изучалось действие стимулятора на рост бамбука. Стимулятор (x) испытывался в пяти дозах: 0 (контроль), одинарная, двойная, тройная и четверная дозы. Рост бамбука (y) отмечался высотой побегов (см) к определенному сроку. Намечено уравнение: $y=a+bx+cx^2$. Получены следующие первичные данные и рассчитаны требуемые суммы (табл. 6).

Таблица 6

Срок	x	x^2	x^3	x^4	y	yx	yx^2
1	0	0	0	0	1,4	0	0
2	1	1	1	1	2,0	2,0	2,0
3	2	4	8	16	3,6	7,2	14,4
4	3	9	27	81	4,0	12,0	36,0
5	4	16	64	256	9,0	36,0	144,0
Σ	10	30	100	354	20,0	57,2	196,4

Получена система нормальных уравнений:

$$\text{I. } 5a + 10b + 30c = 20.$$

$$\text{II. } 10a + 30b + 100c = 57{,}2$$

$$\text{III. } 30a + 100b + 354c = 196{,}4.$$

Решается эта система путем постепенного исключения искомых значений: a, b, c.

Для приведенного примера это легко сделать путем умножения первого уравнения на 2 и сопоставления его со вторым уравнением:

$$(\text{I}\times 2)\ 10a + 20b + 60c = 40{,}0$$

$$\text{II}\ 10a + 30b + 100c = 57{,}2.$$

вычтя почленно из второго уравнения первое, умноженное на 2, получим: $A \rightarrow 0+10b+40c=17{,}2$.

Проведя такую операцию с третьим уравнением и вторым, умноженным на 3, получим:

$$\begin{array}{r} (\text{II}\times 3)\ 30a + 90b + 300c = 171{,}6 \\ \text{III}\ 30a + 100b + 354c = 196{,}4 \\ \hline B \quad 0 + 10b + 54c = +24{,}8 \end{array}$$

Сопоставляя полученные редуцированные уравнения A и B, получаем:

$$\begin{array}{r} 10b + 40c = 17{,}2 \\ 10b + 54c = 24{,}8 \\ \hline 0 + 14c = 7{,}6 \end{array}$$

откуда $c=7{,}6/14=+0{,}543$,

$$b\ (\text{из уравнения } A) = \frac{17{,}2 — 0{,}543 \cdot 40}{10} = —0{,}45,$$

$$a\ (\text{из уравнения I}) = \frac{20 — 0{,}543 \cdot 30 + 0{,}45 \cdot 10}{5} = 1{,}65.$$

Таким образом, математическая модель влияния стимулятора (x) на высоту побегов бамбука (y) имеет такую структуру:

$$y^{\text{II}} = 1{,}65 — 0{,}45\,x + 0{,}543\,x^2.$$

Модель в форме таблицы можно рассчитать по табл. 7:

Таблица 7

x	x^2	bx	cx^2	y''
4	16	—1,80	+8,69	8,54
3	9	—1,35	+4,89	5,19
2	4	—0,90	+2,17	2,92
1	1	—0,45	+0,54	1,74
0	0	—0	+0	1,65

Номограмма изучаемой зависимости приведена на рис. 2.

Способ Чебышева

Наиболее простым точным приемом расчета математических моделей может служить способ, основанный на использовании полиномов (многочленов) Чебышева.

Способ Чебышева заключается в том, что ряд равностоящих градаций аргумента заменяется рядом чисел Чебышева, которые берутся из табл. (XI) этих чисел. Приведены числа Чебышева для парабол первых трех порядков и для числа градаций аргумента, начиная с $g=5$ и до $g=32$.

Каждое число Чебышева умножается на соответствующее значение функции y, все произведения данного ряда суммируются и полученная сумма делится на сумму квадратов чисел Чебышева, приведенных там же для каждого значения p_i (см. табл. XI), получаются элементы полинома по общей формуле:

$$f_{p_i}=\frac{\Sigma\, yp_i}{\Sigma\, p_i^2}.$$

Из полученных выражений можно составить общий полином (многочлен):

$$y'=\alpha+\beta\, p_1+\gamma\, p_2+\delta\, p_3,$$

где $\alpha=\frac{\Sigma\, y}{g}$ — свободный член.

$$\beta=\frac{\Sigma\, yp_1}{\Sigma\, p_1^2};\ \gamma=\frac{\Sigma\, yp^2}{\Sigma\, p_2^2};\ \delta=\frac{\Sigma\, yp_3}{\Sigma\, p_3^2},$$

Частные полиномы составляются:

— для парабол первого порядка — из первых двух членов полинома

$$y'=\alpha+\beta\, p_1;$$

— для парабол третьего порядка — из всех четырех членов

$$y''=\alpha+\beta\, p_1+\gamma\, p_2;$$

— для парабол второго порядка — из трех членов

$$y'''=\alpha+\beta\, p_1+\gamma\, p_2+\delta\, p_3.$$

Описанным способом получаются формулы модели, в которых натуральные значения аргумента заменены числами Чебышева, но значения функции получаются в натуральных измерениях, в своих обычных наименованиях.

Во многих случаях этого бывает достаточно. Если же требуется получить модель с натуральными значениями аргумента, то это легко сделать, переводя параболы вида: $y'=\alpha+\beta p_1$;

$$y''=\alpha+\beta\, p_1+\gamma\, p_2;\ y'''=\alpha+\beta\, p_1+\gamma\, p_2+\delta\, p_3$$

в параболы вида:

$$y'''=a+bx+cx^2+dx^3.$$

Макеты таких переводов приведены в каждом алгоритме выравнивания параболических функций.

Пример использования способа Чебышева дается для тех же первичных данных, на которых показано применение способа наименьших квадратов (табл. 8).

$$b=\frac{\Delta\, y'-c\cdot\Delta'\, x^2}{\Delta'\, x}=\frac{+5{,}62-0{,}545\cdot 12}{2}=-0{,}46$$

$$a=y_i-b_{x_i}-cx_i^2=1{,}65-0-0=+1{,}65$$

$$\boxed{y''=1{,}65-0{,}46\,x+0{,}545\,x^2}$$

Таблица 8

1. Нахождение выравненных значений по способу Чебышева

x	0	1	2	3	4	$g=5$	
y	1,4	2,0	3,6	4,0	9,0	$\Sigma y=20{,}0;\ \alpha=\frac{\Sigma y}{g}=\frac{20}{5}=4{,}0$	
p_1	−2	−1	0	+1	+2	$\Sigma p_1^2=10$	
p_2	+2	−1	−2	−1	+2	$\Sigma p_2^2=14$	
yp_1	−2,8	−2,0	0	+4,0	+18,0	$\Sigma yp_1=+17{,}2$	$\beta=\frac{\Sigma yp_1}{\Sigma p_1^2}=\frac{+17{,}2}{10}=+1{,}72$
yp_2	+2,8	−2,0	−7,2	−4,0	+18,0	$\Sigma yp_2=+7{,}5$	$\gamma=\frac{\Sigma yp_2}{\Sigma p_2^2}=\frac{7{,}5}{14}=+0{,}543$
βp_1	−3,44	−1,72	0	+1,72	+3,44	$y''=+4{,}0+1{,}72p_1+0{,}543p_2$	
γp_2	+1,09	−0,54	−1,09	−0,54	+1,09		
y''	1,65	1,74	2,91	5,18	8,53		

2. Получение модели — формулы с натуральными значениями аргумента (x). Берутся три равноотстоящих значения y и x

y	x	x^2	$\Delta' y$	$\Delta' x$	$\Delta' x^2$	$\Delta'' y$	$\Delta'' x^2$	
8,53	4	16	+5,62	+2	+12	+4,36	+8	$c=\frac{\Delta'' y}{\Delta'' x^2}=+0{,}545$
2,91	2	4	+1,26	+2	+4			
1,65	0	0						

В алгоритме 42 показаны графические способы выравнивания эмпирических функций. Эти алгоритмы возможны только для первой ориентировки и для работ небольшой ответственности.

В алгоритмах 43—46 показано получение математических моделей повышающегося порядка (первого, второго, третьего) для одной и той же эмпирической функции. Показано постепенное приближение гипотезы к фактическим данным.

В алгоритме 46 показаны способы оценки соответствия моделей эмпирическим данным. Предлагаемый критерий соответствия аналогичен дисперсионному критерию Фишера.

Проверка:

x	x^2	bx	cx^2	y'
4	16	−1,84	+8,72	8,53
3	9	−1,38	+4,91	5,18
2	4	−0,92	+2,18	2,91
1	1	−0,46	+0,55	1,73
0	0	−0	+0	1,65

В алгоритме 47 показано применение способа Чебышева к криволинейным функциям, имеющим один максимум.

В алгоритмах 48, 49 показано применение способа наименьших квадратов для гиперболических функций.

В алгоритме 50 показан способ получения математической модели для логистических, симметричных функций.

В алгоритмах 51—56 показаны способы использования в биологических исследованиях кибернетической теории информации.

В алгоритме 51 показаны расчеты энтропии для распределений количественных и качественных признаков.

В алгоритме 52 показаны расчеты количества информации во втором поколении дигибридных скрещиваний при доминировании и при промежуточном наследовании.

В алгоритме 53 дан пример расчета информационного показателя силы влияния в однофакторных комплексах для количественных признаков.

В алгоритме 54 показан информационный анализ влияний при изучении качественных признаков.

В алгоритме 55 показаны расчеты количества информации во втором поколении генетических скрещиваний ($F_1 \times F_1 = F_2$) для различного числа генов от 1 до 7.

В алгоритмах 56 и 57 показаны способы расчета показателей силы влияния: дисперсионного (η^2) и информационного (ИПВ) в одном алгоритме для качественных и для количественных признаков.

В алгоритме 58 показаны сопоставления обоих показателей силы влияния (η^2, ИПВ) для разной степени влияния факториального ($\eta^2 = 0$; $\eta^2 \neq 0$) и случайного (одинакового и неодинакового для разных градаций) при изучении количественных признаков.

В алгоритме 59 показано сопоставление обоих показателей силы влияния (η^2, ИПВ) при изучении качественных признаков, для восьми степеней факториального влияния. Показана значительная близость этих показателей при любой силе влияния.

В алгоритме 60 показано различное влияние случайного разнообразия на показатели C_z и $Э_z$. Информационная мера случайного влияния ($Э_z$) зависит только от различия частных распределений внутри градаций комплекса. При оценке производителей $Э_z$ есть показатель нестандартности потомков каждого производителя, а C_z — показатель

суммарной величины разнообразия по всем потомкам изучаемых производителей.

Ввиду значительной новизны предлагаемых способов практического использования информационных показателей в биологии, необходимо ознакомиться с основными положениями теории информации.

ИНФОРМАЦИЯ

В настоящее время используется несколько различных понятий термина «информация», которые можно классифицировать следующим образом.

ЕДИНИЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

1. Информация — сообщение, осведомление: словесное, письменное или при помощи жестов. Например: сегодня 1 января 1976 года; выстрел из пушки в полдень; информационный бюллетень; передача сообщений на кораблях условными движениями флагов.

2. Информация — сигнал, т. е. такое сообщение, которое вызывает последствия, по своим размерам значительно превосходящие размеры сигнала, например: красная ракета как сигнал начала военного действия; нажатие гашетки для производства выстрела; звонок как сигнал начала уроков в школе.

ГРУППОВАЯ ИНФОРМАЦИЯ

3. Информация — снятие неопределенности о состоянии массового явления, или уменьшение энтропии (см. ниже).

4. Информация — отражение разнообразия. Соединение понятий «информация» и «разнообразие» впервые предложено И. И. Шмальгаузеном в 1960 г. Он утверждал, что количество информации является мерой многообразия в строении популяции, а также — мерой наследственного многообразия в строении зиготы особей. Такое же положение высказывает В. М. Глушков (1964), который полагает, что информация существует постольку, поскольку существует неоднородность материальных тел, неоднородность несет информацию.

Более полная характеристика информации проводится также в философских работах В. С. Тюхтина (1967) и А. Д. Урсула (1974), где понятие информации связывается еще и с понятием отражения.

В самом общем случае информация определяется как отражение разнообразия. Общая характеристика информации выступает как взаимосвязь разнообразия и отражения. Такое понимание информации дает очень много при анализе наследственных явлений массового порядка при изучении наследования количественных признаков.

5. Информация — основное свойство материи. В последнее время появились работы, в которых информация рассматривается как основное свойство в форме связи разнообразия с отражением и обуславливает возможность проявления материи в любой ее форме и в любых условиях.

Для того чтобы воздействовать на живые и неживые объекты, определенная форма материи должна иметь: во-первых, разнообразие (в простейшем случае: есть, нет) и, во-вторых, должна отражать это разнообразие на внешние (по отношению к ней) объекты.

Первые начала этого нового определения информации можно найти в статье А. Д. Урсула (1974).

ЭНТРОПИЯ

Понятие «энтропия» возникло при изучении энергетических процессов. Было установлено, что бесконечные превращения энергии в природе сопровождаются необратимыми качественными изменениями — энергия теряет способность производить работу. Такое качественное изменение энергии Клаузис в 1865 г. назвал энтропией.

Больцман в 1877 г. показал, что возрастание энтропии равносильно переходу упорядоченного маловероятного состояния в хаотическое, более вероятное, причем величина энтропии пропорциональна логарифму состояния системы и может быть выражена формулой:

$$Э = -p \lg_2 p,$$

где p — вероятность (или доля) события (или состояния), энтропию которой требуется измерить;

$\lg_2$ — двоичный логарифм вероятности (доли), показатель степени, в которую надо возвести основание логарифма 2, чтобы получить данное число.

Используя понятие энтропии, можно заключить, что информация есть мера того количества неопределенности, которое исчезает при получении сообщения. Количество информации равно количеству исчезнувшей энтропии.

Устанавливаются следующие основные термины:

Информация — явление уменьшения энтропии.

Негэнтропия (Н) — мера информации, количество снятой энтропии.

Значения энтропии для любой вероятности (доли) можно рассчитать заранее. Краткая двузначная таблица показателей энтропии приведена в табл. 9. Например:

$$Э0{,}00 = 0{,}00;\quad Э0{,}10 = 0{,}33;\quad Э0{,}25 = 0{,}50$$
$$Э0{,}50 = 0{,}50;\quad Э0{,}88 = 0{,}16;\quad Э1{,}00 = 0{,}00$$

Таблица 9

Значения показателей энтропии (без ноля целых) для любой двузначной доли ($0{,}5 \Rightarrow 0{,}05$; $38 \rightarrow 0{,}38$; и т. д.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00	07	11	15	19	22	24	27	29	31
0,1	33	35	37	38	40	41	42	43	45	47
0,2	46	47	48	49	49	50	51	51	51	52
0,3	52	52	53	53	53	53	53	53	53	53
0,4	53	53	53	52	52	52	52	51	51	50
0,5	50	50	49	49	48	48	47	46	46	45
0,6	44	43	43	42	41	40	40	39	38	37
0,7	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27
0,8	26	24	23	22	21	20	19	17	16	15
0,9	14	12	11	10	08	07	06	04	03	01

Более точные знания энтропии можно получить, используя общую формулу:

$$Э\,p = -p \lg_2 p = -p \cdot \frac{\lg_{10} p}{0{,}30103},$$

где p — доля, $\lg_2$, $\lg_{10}$ двоичный и обычный десятичный логарифмы.

Например:

$$Э(0{,}75) = -0{,}75 \frac{\lg_{10} 0{,}75}{0{,}30103} = -0{,}75 \frac{-0{,}12494}{0{,}30103} = 0{,}31128$$

$$Э(0{,}25) = -0{,}25 \cdot \frac{\lg_{10} 0{,}25}{0{,}30103} = -0{,}25 \cdot \frac{-0{,}60206}{0{,}30103} = 0{,}50000.$$

Если имеется система долей, например, распределение количественного признака с относительными частотами (в долях), то общая энтропия группы равна сумме частных энтропий по классам распределения. Такая система показана в табл. 10.

Таблица 10

Расчет общей энтропии для распределения количественного признака

W	10	12	14	16	18	20	22	$g = 7$
f	1	5	20	25	19	7	2	$n = 78$
$p = \frac{f}{n}$	0,01	0,06	0,26	0,32	0,23	0,09	0,03	$\Sigma p = 1{,}00$
Э	,07	,24	,51	,53	,49	,31	,15	$Э = \Sigma_Э = 2{,}30$

Сравнение групп по их негэнтропии (снятой энтропии), если группы различаются по структуре качественных разделений, можно провести, определив общие энтропии этих групп. Такое сравнение показано в табл. 11.

Таблица 11

Сравнение двух биоценозов по видовому составу мхов и по суммарным энтропиям видовых структур в битах

Виды мхов	Биоценозы					
	A			B		
	f	p	Э	f	p	Э
I	43	,86	,19	13	,26	,51
II	3	,06	,24	13	,26	,51
III	2	,04	,19	12	,24	,49
IV	2	,04	,19	12	,24	,49
Σ	50	1,00	0,81	50	1,00	2,00

Суммарная информация о видовом составе биоценозов оказалась: по биоценозу A $Э_A = 0{,}81$, а по биоценозу B в два с половиной раза больше $Э_B = 2{,}00$.

В первом биоценозе очень велико содержание одного первого вида мхов, что увеличивает его относительное содержание и тем уменьшает суммарную энтропию.

ИНФОРМАЦИЯ (НЕГЭНТРОПИЯ) В ГЕНЕТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Расчет негэнтропии (снимаемой неопределенности) может дать некоторое уточнение результатов генетического анализа.

Во втором поколении генетических скрещиваний ($F_1 \times F_1 = F_2$) выявляются группы одинаковых фенотипов в различных соотношениях:

При доминировании:
— моногибридное скрещивание 3:1;
— дигибридное 9:3:3:1;
— тригибридное 27:9:9:9:3:3:3:1 и т. д.

При промежуточном наследовании:
— моногибридное скрещивание 1:2:1;
— дигибридное, — 1:2:2:4:1:2:1:2:1 и т. д.

Для каждого расщепления можно определить негэнтропию в единицах информации — битах (см. табл. 10). При таком определении вскрывается интересная закономерность: негэнтропия каждого расщепления $Эg$ соответствует числу генов (пар аллеломорфов), определяющих развитие признака g, что можно выразить простыми формулами:

при доминировании $Эg = 0{,}8g$;
при промежуточном исследовании $Эg = 1{,}5g$;
при обратных скрещиваниях (первое поколение с родительскими формами) закономерность еще проще $Эg = g$.

Выявление этих закономерностей показано в алгоритме 55. Там же приведены объемы выборок (число потомков в поколении), достаточные, чтобы гарантировать наличие в выборке хотя бы одного полного рецессива.

Выявленные закономерности могут быть использованы для решения следующих задач:

1. Определение объема информации в данном расщеплении.
2. Сравнение объемов информации для разных расщеплений.
3. Для примерного нахождения числа генов, определяющих развитие признака в тех случаях, когда обычный генетический анализ (установление числа генов одного признака) или невозможен, или затруднителен, или не дает ясных результатов.

ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ СИЛЫ ВЛИЯНИЯ

Использование основных понятий теории информации дает возможность сконструировать новый информационный показатель силы влияния: ИПВ, что иллюстрируется на следующем примере.

Проверялось действие химического стимулятора на рост трехдневных крысят. Фактор испытывался в трех дозах — контроль, одинарная доза, двойная доза, рост измерялся длиной тела (без хвоста) в миллиметрах.

Для этого исследования действие стимулятора не было известно, эту неопределенность можно измерить энтропией всей системы, состоящей из всех трех градаций в сумме — $Э_2$.

Затем можно определить ту энтропию, которая осталась после разделения всего комплекса на три градации $Э_{2/1}$. Оценка выявленной информации (количество снятой энтропии) определяется как разность общей и остаточной энтропии:

Негэнтропия $= Э_2 - Э_{2/1}$.

Если отнести эту разность к общей энтропии, то можно получить информационный показатель силы влияния

$$ИПВ = \frac{Э_2 - Э_{2/1}}{Э_2}.$$

Расчет показан в табл. 12.
f — частоты распределений,
p — относительные частоты (доли f/n),
$Э$ — частные энтропии каждой доли (табл. 9),
n — число крысят в каждой градации.
Общая энтропия $Э_2 = \Sigma э = 2{,}09$.

Остаточная энтропия

$$Э_{2/1} = \frac{\Sigma (n \Sigma Э)}{N} = \frac{90{,}90}{58} = 1{,}57.$$

Негэнтропия $Э_2 - Э_2/_1 = 2{,}09 - 1{,}57 = 0{,}52$.
Информационный показатель силы влияния

$$ИПВ = \frac{Э_2 - Э_{2/1}}{Э_2} = \frac{0{,}52}{2{,}09} = 0{,}25.$$

Эта схема применима к любому числу градаций излучаемого влияния. Расчет дисперсионного показателя силы влияния по этому примеру дал:

$$\eta_x^2 = Cx/Cy = 0{,}42.$$

В некоторых случаях для сравнения с другими показателями силы влияния удобнее использовать извлечение квадратного корня:

$$ИПВ = \sqrt{\frac{Э_2 - Э_{2/1}}{Э_2}} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}50.$$

ГЕНЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Большое значение приобретает теория информации в генетике, точнее в генетике количественных признаков.

Количественные признаки проявляются не однозначно. Каждому генотипу соответствует целый спектр фенотипов, причем спектры разных генотипов могут накладываться своими краями друг на друга. Кроме того, количественные признаки обычно обусловливаются очень большим комплексом генов, развитие некоторых количественных признаков определяется развитием всего организма. Именно об этих особенностях количественных признаков писал академик Н. И. Вавилов (1965): «Нельзя, скрещивая сорта, выхватывать отдельные признаки, игнорируя всю остальную сложную конструкцию. Прямые опыты неудач, к сожалению, обычно игнорируемые, показывают неправильность такого элементарного генетического подхода» (с. 29);

«Поиски специальных генов жирномолочности, мясности, которыми занимались некоторые генетики, вряд ли могут считаться особенно

Таблица 12

Расчет информационного показателя силы влияния

Длина	Контроль			Одинарная доза			Двойная доза			Σ		
	f	p	э	f	p	э	f	p	э	f	p	э
6							4	22	48	4	07	27
5				6	30	52	5	28	51	11	19	47
4	5	25	50	12	60	44	6	33	53	23	39	53
3	10	50	50	2	10	33	3	17	43	15	26	51
2	5	25	50							5	09	31
$\Sigma_э$	$n=20$			$n=80$			$n=18$			$N=58$		
$n\Sigma_э$	30,00			25,80			35,10			$=90{,}90$		

актуальными, и само существование такого рода генов весьма сомнительно. Молочность, мясность зависят от многих физиологических и анатомических особенностей организма» (с. 39);

«Продуктивность является результатом деятельности всего организма в целом, и потому изучать ее надо в комплексе».

О необходимости особого подхода к изучению генетики количественных признаков указывали также многие генетики: А. С. Серебровский, Н. П. Дубинин, М. Е. Лобашов, А. Мюнцинг и др.

В последнее время выяснилось достаточно определенно то обстоятельство, что изучать генетику количественных признаков такими же методами, какие применимы для качественных признаков, невозможно.

При установлении методов изучения генетики количественных признаков следует установить их главное отличие: большой комплекс генов для каждого признака и невозможность выявить действие каждого гена в отдельности.

Это положение можно принять за основу при нахождении методов генетического анализа количественных признаков. В этом отношении интересно мнение Н. Н. Жукова-Вережникова (1966), приведенное в его книге: «Предметом кибернетики является совокупность причинно-следственных отношений в тех случаях, когда причин и следствий так много, что детальное познание каждой отдельной пары оказывается невозможным» (с. 19).

Такую же характеристику предлагал У. Эшби (1964): «...теория информации может рассматриваться как форма упрощения, ибо вместо исследования каждой индивидуальной причины, она смешивает в общую массу все причины и следствия и связывает лишь два итога».

Эти положения общей кибернетики для нас могут означать, что для полигенных, количественных признаков, когда действие каждого гена в отдельности изучить невозможно, общим методом может быть изучение генетической информации. Под генетической информацией в этих исследованиях следует понимать четвертое определение: о т р а ж е н и е р а з н о о б р а з и я р о д и т е л е й (по их наследственным способностям) в р а з н о о б р а з и и и х д е т е й.

Кроме того, под генетической информацией можно понимать также и отражение р а з н о о б р а з и я о с о б е й в о д н и х у с л о в и я х, в р а з н о о б р а з и и и х ж е в д р у г и х у с л о в и я х (возраст, условия жизни).

Материальная основа генетической информации — это комплекс наследственно-активных элементов клеточного ядра и цитоплазмы.

Как и всякая информация (по второму определению), генетическая информация служит сигналом и организует общее направление развития организма (онтогенез), основные реакции организма на условия жизни и внешние воздействия (норма реакции) и генетические информации потомков (наследование).

Проявляется генетическая информация в движении, причем это движение (отражение) может проходить в двух основных формах: 1) движение от поколения родителей к поколению детей в процессе наследования; 2) движение от материнских клеток к дочерним клеткам в процессе онтогенеза.

При осуществлении этих форм движения возникают два особых биологических явления: н а с л е д у е м о с т ь и п о в т о р я е м о с т ь.

При передаче генетической информации от родителей детям, при отражении генетического разнообразия родителей в потомстве, возникает наследуемость (heritability), как бо́льшее или меньшее сходство распределения детей с распределением родителей, или как сходство рангов детей (по развитию признака) с рангами родителей (по их способности давать лучшее или худшее потомство).

При переходе генетической информации от клетки к клетке, при отражении разнообразия в проявлении генотипов особей в одном состоянии в разнообразии их же, но в другом состоянии (возраст, условия жизни), возникает повторяемость (repeatability) как большее или меньшее постоянство рангов (по развитию признака) в группе одних и тех же особей при переходе группы из возраста в следующий возраст или из одних условий жизни в другие.

Движение генетической информации при наследуемости и повторяемости показано в табл. 13.

Таблица 13

Движение генетической информации количественных признаков			
первая форма движения: от родителей к детям		вторая форма движения: от клетки к клетке	
наследование		онтогенез	
два поколения в сходных условиях		одно поколение в двух разных состояниях	
ранги родителей	ранги детей	ранги особей в одном состоянии	ранги особей в другом состоянии
①	→ ②	①	→ ③
②	→ ①	②	→ ①
③	→ ③	③	→ ⑤
④	→ ⑤	④	→ ②
⑤	→ ④	⑤	→ ④
НАСЛЕДУЕМОСТЬ		ПОВТОРЯЕМОСТЬ	
$r_s=+0{,}8$		$r_s=+0{,}3$	

ПОКАЗАТЕЛИ НАСЛЕДУЕМОСТИ

При определении показателей наследуемости надо помнить, что это биологическое явление можно оценивать непременно отдельно по половым группам родителей: по отцам, при выравненном или усредненном маточном поголовье; по матерям, по детям от одного отца; по родителям у самоопылителей.

Совершенно необязательно, чтобы показатель наследуемости признака был одинаковым и по отцам и по матерям. Показатель наследуемости, например, настрига шерсти, может быть высок по матерям и низок по отцам, если хорошо подобранные, одинаково высокопродуктивные отцы работают на сборном неотобранном маточном поголовье.

РАНГОВЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ НАСЛЕДУЕМОСТИ

Ранговый показатель наследуемости — это коэффициент корреляции Спирмена, оценивающий связь или соответствие рангов родителей и детей:

$$h^2 = r_s = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{(n-1)\,n\,(n+1)}; \quad d = \rho_2 - \rho_1;$$

$$m_{h^2} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}; \quad t_{h^2} = h^2\sqrt{n-1},$$

где Σd^2 — сумма квадратов разностей рангов по парам: родитель — потомок;

n — число пар: родитель — потомок.

Ранговый показатель наследуемости, показанный в таблице 13, равен $h^2 = r_s = +0{,}8$, а повторяемости — $\Pi = r_s = +0{,}3$.

Этот показатель по своей сущности (оценка сходства рангов) наиболее полно соответствует сущности биологического явления. В селекции необходимо выяснить, дают ли лучшие родители лучшее потомство. Если это происходит не всегда, то представляет интерес оценить степень соответствия рангов родитель — потомок, чтобы предусмотреть эффективность планируемой массовой селекции. Все это и дает ранговый показатель наследуемости.

Но ранговый коэффициент корреляции все же имеет ограниченное применение: он возможен только в тех случаях, когда признак проявляется и у детей, и у родителей. Наследуемость обильномолочности по отцам невозможно оценить этим показателем, так же как и наследуемость качества спермы по матерям. Кроме того, при больших группах, когда сопоставляется 50, 100, 200 родственных пар, сильно затрудняется ранжирование, а сам показатель почти полностью приближается к коэффициенту корреляции Пирсона.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ НАСЛЕДУЕМОСТИ

Корреляционный показатель наследуемости — это коэффициент корреляции Пирсона, рассчитываемый по любой правильной формуле, например:

$$r = \frac{\Sigma V_1 V_2 - \dfrac{\Sigma V_1 \Sigma V_2}{N}}{\sqrt{C_1 C_2}} \quad \text{или} \quad r = \frac{C_1 + C_2 - C_d}{2\sqrt{C_1 C_2}}.$$

Методы расчета коэффициента корреляции Пирсона приводятся во всех учебниках по биометрии и по математической статистике.

Рекомендуемое некоторыми авторами удвоение пирсоновского коэффициента корреляции для оценки наследуемости на практике не оправдало себя, так как приводит к непонятным результатам (например, $h^2 > 1{,}0$).

Коэффициент корреляции как показатель наследуемости имеет те же недостатки, он возможен только тогда, когда признак проявляется и у родителей, и у потомков и, кроме того требуется, чтобы и потомки и родители имели числовое выражение признака.

Оба этих требования снимаются, если наследуемость оценивать другим коэффициентом Пирсона — корреляционным отношением. Квадрат этого показателя может служить оценкой наследуемости, вычисляется он методом однофакторного дисперсионного анализа.

ДИСПЕРСИОННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ НАСЛЕДУЕМОСТИ

Обычно дисперсионный анализ дает возможность оценить силу и достоверность влияния факторов на какой-нибудь количественный признак. Но при определении дисперсионного показателя наследуемости получается оценка генетического разнообразия родителей. Чем больше показатель, тем разнообразнее родители по своей способности давать лучшее или худшее потомство. Чем меньше показатель, тем более стандартны, менее разнообразны родители по своим наследственным способностям.

Таблица 14

Расчет дисперсионного показателя наследуемости (упрощенная схема)
Фактор — генетическое разнообразие родителей
Градации фактора — сами родители A, B, C.
Градации комплекса — три градации по 2 или 3 потомка в каждой.
Результативный признак — любой количественный признак у животных, растений, микробов.
Шифр комплекса: $N = 8$, $g = 3$, $n = 3, 2, 3$

	A	B	C	
V	1, 2, 3	4, 6	7, 8, 9	$S_1 = \Sigma V = 40$ $M_\Sigma = S_1/N = 40/8 = 5$
n	3	2	3	$S_2 = \Sigma V^2 = 260$
ΣV	6	10	24	$C_g = S_2 - \dfrac{S_1^2}{N} = 260 - \dfrac{40^2}{8} = 60$
M_i	2	5	8	$C_x = \Sigma n\,(M_i - M_\Sigma)^2 =$ $= 3(2-5)^2 + 2(5-5)^2 + 3(8-5)^2 = 54$

$$h^2 = \eta^2 = 54/60 = 0{,}90$$

$$\nu_1 = g - 1 = 2$$

$$\nu_2 = N - g = 5$$

$$F_{h^2} = \frac{h^2}{1-h^2} \cdot \frac{N-g}{g-1} = \frac{0{,}9}{0{,}1} \cdot \frac{5}{2} = \underline{\underline{22{,}5}}$$

$$F_{St} = \{5{,}8 - 13{,}3 - 36{,}6\}$$

Техника расчета дисперсионных показателей наследуемости та же, что и при его обычном использовании:

$$h^2 = \eta^2 = C_x/C_y,$$

$$F_h^2 = \sigma_x^2/\sigma_z^2 \geqslant F_{st} \begin{Bmatrix} \nu_1 = g - 1 \\ \nu_2 = N - g \end{Bmatrix}.$$

Алгоритмы расчета приведены в книгах Н. А. Плохинского (1964, 1967, 1969, 1970).

Рабочий алгоритм расчета дисперсионного показателя наследуемости дается в табл. 14. Анализ, приведенный в этой таблице, показывает, что исследованная группа родителей: отцов, при выравненном маточном поголовье; или матерей, в потомстве от одного отца; или родителей, самоопылителей — в высшей степени неодинакова по своим наследственным способностям.

С вероятностью второго порога $\beta = 0{,}99$; $\alpha = 0{,}01$ возможен прогноз большой эффективности племенного отбора.

Родитель «C» значительно превосходит родителя «A»:

$$F_{CA} = \frac{(M_C - M_A)^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n_C \cdot n_A}{n_C + n_A} = \frac{(8-2)^2}{1{,}2} \cdot \frac{3 \cdot 3}{3+3} = 45{,}0.$$

$$\sigma_z^2 = \frac{C_y - C_x}{N - g} = \frac{60 - 54}{5} = 1{,}2$$

$$\begin{matrix} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = 5 \end{matrix} \; F_{st}\{6{,}6 - 16{,}3 - 47{,}6\}.$$

ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ НАСЛЕДУЕМОСТИ

Следует иметь в виду, что информационный показатель наследуемости — это особый показатель, не обязательно равный дисперсионному показателю.

Дело в том что информационный показатель более чувствителен к внутриградационному разнообразию. Например, при равенстве всех частных средних по градациям комплекса дисперсионный показатель будет равен нулю, а информационный показатель может быть больше нуля, и иногда на значительную величину.

Сопоставление этих двух показателей — дисперсионного и информационного — более глубоко вскрывает особенности наследственных способностей родителей.

Поэтому в ответственных селекционных работах желательно регулярное, из года в год, определение этих двух показателей наследуемости. Это поможет следить за изменениями селекционного состояния стада, сорта или штамма, и использовать полученную информацию для интенсификации и корректировки селекционных работ.

Расчет информационного показателя наследуемости приведен в табл. 15, где использованы данные табл. 14 в развернутой форме.

Информационный показатель оказался в данном случае меньше дисперсионного ($0{,}52 < 0{,}90$) вследствие дополнительного учета малой степени внутриградационного разнообразия. В этом и проявилась дополнительная характеристика селекционного состояния элитной группы, выявленная информационным показателем наследуемости.

Таблица 15

Расчет информационного показателя наследуемости по первичным данным табл. 14

	A			B			C			Σ		
	f	p	Э	f	p	Э	f	p	Э	f	p	Э
9							1	0,33	0,53	1	0,125	0,375
8							1	0,33	0,53	1	0,125	0,375
7							1	0,33	0,53	1	0,125	0,375
6				1	0,50	0,50				1	0,125	0,375
5												
4				1	0,50	0,50				1	0,125	0,375
3	1	0,33	0,53							1	0,125	0,375
2	1	0,33	0,53							1	0,125	0,375
1	1	0,33	0,53							1	0,125	0,375
n	3			2			3			8		
ΣЭ	1,59			1,00			1,59			$Э_2 = ΣЭ = 3{,}00$		
nΣЭ	4,77			2,00			4,77			$\Sigma(nΣЭ) = 11{,}54$		

$$Э_{2/1} = \frac{\Sigma(nΣЭ)}{N} = \frac{11{,}54}{8} = 1{,}44$$

$$ИПН = \frac{Э_2 - Э_{2/1}}{Э_2} = \frac{3{,}00 - 1{,}44}{3{,}00} = 0{,}52\ (0{,}72)$$

ПРИМЕНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАСЛЕДУЕМОСТИ

Показатели наследуемости могут использоваться при массовой и углубленной селекции для решения следующих вопросов:

1. Прогноз эффективности отбора.

2. Анализ селекционной работы за ряд лет, выявление результативности проводимой селекции. Для этой цели необходимо проводить регулярное определение показателей наследуемости каждый год.

3. Анализ системы проводившегося подбора путем сравнения четвертого и пятого дисперсионных показателей наследуемости по методу, описанному в книге Н. А. Плохинского (1968) на с. 136.

4. Установление зон завоза импортных улучшателей на основе экспертизы гетерогенности производителей, причем гетерогенность производителей, работавших в данной области (крае, республике), оценивается показателем наследуемости по отцам.

Зона завоза импортных производителей устанавливается для областей с малым показателем наследуемости и, следовательно, с недостаточным генетическим разнообразием, определяющим невозможность выбора улучшателя в собственных стадах.

5. Оценка производителей по качеству потомства, как продолжение анализа наследуемости, путем ранжирования изученных производителей по частным средним дисперсионного комплекса. Алгоритм такой оценки показан в книге Н. А. Плохинского (1967) на с. 156—157.

6. Определение генетической обусловленности новых, еще неизученных признаков. Например, для определения генетической обусловленности нового признака «красная вода» (порока меха пушных зверей) был составлен дисперсионный комплекс по отцам для качественного признака — процент щенят с этим пороком в потомстве каждого самца-производителя. Дисперсионный показатель наследуемости для данного случая определялся по алгоритму 22, приведенному в книгах Н. А. Плохинского (1967, 1969, 1970). Показатель наследуемости оказался равным $h^2 = \eta_x^2 = 0{,}66$, т. е. достаточно высоким и достоверным по третьему порогу вероятности ($\beta > 0{,}999$).

Это значит, что производители были достоверно неодинаковы по способностям давать в своем потомстве щенят с пороком меха. А это свидетельствует о генетической обусловленности «красной воды».

ПОКАЗАТЕЛИ ПОВТОРЯЕМОСТИ

Показатель повторяемости используется для оценки особого биологического явления, заключающегося в том, что при переходе группы одних и тех же особей из одного состояния в другое (возраст, условия жизни) происходит отражение разнообразия особей первого состояния в разнообразии тех же особей во втором состоянии. Получается большее или меньшее сходство рангов первого состояния с рангами второго состояния.

Очевидно, что принципиально лучшей оценкой отражения такого сходства рангов будет ранговый коэффициент корреляции, такой же, как и при оценке наследуемости:

$$П = r_S = 1 - \frac{6\,\Sigma\, d^2}{(n-1)\, n\, (n+1)}.$$

Предлагаемый некоторыми авторами внутриклассовый коэффициент корреляции Фишера не может служить оценкой повторяемости, так как математическая сущность этого коэффициента (реципрокное сопоставление пары дат в прямом и обратном направлении) совершенно не соответствует биологической сущности повторяемости (сходство рангов особей в двух разных состояниях).

ПРИМЕНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПОВТОРЯЕМОСТИ

1. Показатель повторяемости определяется для одного поколения (в разных состояниях), поэтому его никак нельзя использовать для оценки наследуемости (что иногда предлагалось), так как для этой цели обязательно сопоставление двух поколений: родителей и детей.

2. Показатель повторяемости может служить для прогноза эффективности раннего отбора продуктивных животных.

Большой организационный вопрос о доле первотелок в структуре молочного стада может быть разрешен после анализа повторяемости обильномолочности от первой до наивысшей лактации. При высокой повторяемости можно оставлять меньшее количество первотелок, и, наоборот, при слабой повторяемости требуется большая доля первотелок в стаде для избежания ошибок выбраковки коров с высоким темпом возрастного раздоя.

Первые работы по изучению повторяемости удоев показывают, что возрастная повторяемость этого признака невелика, следовательно, опасно снижать процент первотелок при планировании оборота

молочных стад. В то же время первые работы выявили большую повторяемость процента жира в молоке, по этому признаку можно отобрать лучших коров в молодом возрасте с меньшими ошибками.

3. Показатель повторяемости может использоваться для прогноза эффективности отбора в неоптимальных условиях.

Первые работы по оценке повторяемости показали, что отбор в плохих условиях вообще может привести к ошибочным результатам, но небольшое ухудшение условий дает достаточную повторяемость основных признаков молочного скота, по удою за 300 дней лактации П=0,60, по проценту жира в молоке П=0,63, по живому весу П=0,73.

4. На кафедре генетики биологического факультета МГУ в дипломной работе А. А. Семичевой приведены первые определения возрастной повторяемости у культурных растений. Краткая сводка результатов этих работ показана в табл. 16.

Таблица 16

Анализ онтогенеза у растений. Оценка стандартности сортов по темпу возрастного развития

Растение	Признак	Показатели возрастной повторяемости
Арабидопсис	высота стебля длина листа	0,98 0,92
Редис	длина семядольного листа	0,79÷0,83
Гречиха	высота растения количество цветков	0,53÷0,56 0,42÷0,85
Лук репчатый	содержание хлорофилла в листьях	0,39÷0,63

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В СЕЛЕКЦИИ

После разработки теоретических основ и первичных алгоритмов расчета информационных показателей возникла необходимость проверки приемлемости этих показателей в практической селекции.

Первые работы в этом направлении провел В. Н. Новоставский в вычислительном центре института «Аскания Нова». Работы эти относились к планированию селекции красного степного скота Украины на повышение удоя и жирномолочности.

Из отчета по этим исследованиям видно, что изучение наследственных способностей производителей проведено на обширном материале трех племенных хозяйств (табл. 17).

Анализировались изменения за 6 лет (1970—1975 гг.) общих показателей (удой, процент жира в молоке) и трех показателей гетерогенности (различия отцов по качеству их потомков).

1. Гетерогенность по среднему уровню признака измерялась показателем наследуемости по отцам: $h^2 = \eta_x^2 = 1 - C_z/C_y$ (по алгоритму 57).

2. Гетерогенность по разнообразию потомков каждого отца измерялась обычным коэффициентом вариации $CV = 100\,\sigma/M$.

Таблица 17

Изученные поголовья

Хозяйство	Количество	
	отцов	их дочерей
Племхоз «Большевик» Донецкой обл.	24	740
Госплемзавод «Красный чабан» Херсонской обл. . .	66	1873
Племзавод «Широкое» Крымской обл.	182	3226
Всего: . . .	272	5839

Таблица 18

Гетерогенность быков производителей в госплемзаводе «Красный чабан»

Годы		1970	1971	1972	1973	1974	1975
Средний удой на фуражную корову по всему стаду (ц)		33	33	37	37	38	40
Число изученных	отцов	9	10	8	12	13	14
	дочерей	300	303	279	320	309	361
Удои дочерей, приведенные к 3-й лактации	М (ц)	35	33	33	40	42	42
	Г1	0,04	0,04	0,01	0,10	0,06	0,05
	Г2 (%)	21	22	23	26	31	22
	Г3	0,07	0,09	0,08	0,11	0,12	0,13
Жирномолочность дочерей	М (%)	3,6	3,6	3,6	3,6	3,7	3,7
	Г1	0,04	0,15	0,02	0,07	0,07	0,05
	Г2 (%)	5	6	5	7	6	6
	Г3	0,10	0,11	0,07	0,06	0,12	0,12

Выводы: **По удою** достаточный средний уровень и сильные разнообразия дочерей в потомстве каждого отца (Г2=21÷31). Явная возможность индивидуального отбора лучших дочерей.

По жирномолочности: низкий процент жира в молоке и совсем малая гетерогенность: Г2 = 5 ÷ 7, Г1 = 0,04 ÷ 0,15, Г3 = 0,05 ÷ 0,12. Слабая возможность отбора. Необходим ввод в стадо новых производителей. Решено импортировать англеров жирномолочных линий

3. Гетерогенность по структуре разнообразия потомков каждого отца измерялась информационным показателем (алгоритм 57), который не зависит от среднего уровня потомков и выявляет «выдающихся» детей:

$$ИПВ = 1 - Э_z/Э_y.$$

Расчеты по получению оценок стад и производителей были запрограммированы и проведены на ЭВМ «Наири-С». Это позволило выполнить испытание методов в короткий срок. Некоторые результаты расчетов приведены в таблице 18.

В отчете показано, что регулярный, ежегодный анализ изменения трех показателей гетерогенности, и особенно третьего, информационного, вскрывает особенности проводимой селекции и дает указания, необходимые для планирования дальнейшей племенной работы.

В. Н. Новоставский на основе проведенного испытания заключает: «Такой анализ на различных уровнях (стадо, группа хозяйств зоны деятельности госплемрассадника, породный массив, порода в целом) в настоящее время в связи с созданием информационно-вычислительных подразделений, оснащенных ЭВМ, позволит вскрыть направление селекции, характерное для конкретного периода. Анализ изменений информационного и дисперсионного показателей на фоне изменений средней продуктивности за ряд лет вскрывает общее направление племенной работы в определенном хозяйстве или зоне за определенный период».

ЧАСТЬ II

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

Квадраты чисел

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1 024	1 089	1 156	1 225	1 296	1 369	1 444	1 521
4	1 600	1 681	1 764	1 849	1 936	2 025	2 116	2 209	2 304	2 401
5	2 500	2 601	2 704	2 809	2 916	3 025	3 136	3 249	3 364	3 481
6	3 600	3 721	3 844	3 969	4 096	4 225	4 356	4 489	4 624	4 761
7	4 900	5 041	5 184	5 329	5 476	5 625	5 776	5 929	6 084	6 241
8	6 400	6 561	6 724	6 889	7 056	7 225	7 396	7 569	7 744	7 921
9	8 100	8 281	8 464	8 649	8 836	9 025	9 216	9 409	9 604	9 801
10	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881
11	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161
12	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641
13	16 900	17 161	17 424	17 689	17 956	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321
14	19 600	19 882	20 164	20 449	20 736	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201
15	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281
16	25 600	25 921	26 244	26 569	26 896	27 225	27 556	27 889	28 224	28 561
17	28 900	29 241	29 584	29 929	30 276	30 625	30 976	31 329	31 684	32 041
18	32 400	32 761	33 124	33 489	33 856	34 225	34 596	34 969	35 344	35 721
19	36 100	36 481	36 864	37 249	37 636	38 025	38 416	38 809	39 204	39 601
20	40 000	40 401	40 804	41 209	41 616	42 025	42 436	42 849	43 264	43 681
21	44 100	44 521	44 944	45 369	45 769	46 225	46 656	47 089	47 524	47 961
22	48 400	48 841	49 284	49 729	50 176	50 625	51 076	51 529	51 984	52 441
23	52 900	53 361	53 824	54 289	54 756	55 225	55 696	56 169	56 644	57 121
24	57 600	58 081	58 564	59 049	59 536	60 025	60 516	61 009	61 504	62 001
25	62 500	63 001	63 504	64 009	64 516	65 025	65 536	66 049	66 564	67 081
26	67 600	68 121	68 644	69 169	69 696	70 225	70 756	71 289	71 824	72 361
27	72 900	73 441	73 984	74 529	75 076	75 625	76 176	76 729	77 284	77 841
28	78 400	78 961	79 524	80 089	80 656	81 225	81 796	82 369	82 944	82 521
29	84 100	84 681	85 264	85 849	86 436	87 025	87 616	88 209	88 804	89 401
30	90 000	90 601	91 204	91 809	92 416	93 025	93 636	94 249	94 864	95 481
31	96 100	96 721	97 344	97 969	98 596	99 225	99 856	100 489	101 124	101 761
32	102 400	103 041	103 684	104 329	104 976	105 625	106 276	106 929	107 584	108 244

Продолжение табл. I

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
33	108 900	109 561	110 224	110 889	111 556	112 225	112 896	113 569	114 244	114 921
34	115 600	116 281	116 964	117 649	118 336	119 025	119 716	120 409	121 104	121 801
35	125 500	123 201	123 904	124 609	125 316	126 025	126 736	127 449	128 164	128 881
36	129 600	130 321	131 044	131 769	132 496	133 225	133 956	134 689	135 424	136 161
37	136 900	137 641	138 384	139 129	139 876	140 625	141 376	142 129	142 884	143 641
38	144 400	145 161	145 924	146 689	147 456	148 225	148 996	149 769	15 054	151 321
39	152 100	152 881	153 664	154 449	155 236	156 025	156 816	157 609	158 404	159 201
40	160 000	160 801	161 604	162 409	163 216	164 025	164 836	165 649	166 464	167 281
41	168 100	168 921	169 744	170 569	171 396	172 225	173 056	173 889	174 724	175 561
42	176 400	177 241	178 084	178 929	171 396	172 225	173 056	173 889	174 729	175 561
43	184 900	185 761	186 624	187 489	188 356	189 225	190 096	190 969	191 844	192 721
44	193 600	194 481	195 364	196 249	197 136	198 025	198 916	199 809	200 704	201 601
45	202 500	203 401	204 304	205 209	206 116	207 025	207 936	208 849	209 764	210 681
46	211 600	212 521	213 444	214 369	215 296	216 225	217 156	218 089	219 024	219 961
47	220 900	221 841	222 784	223 729	224 676	225 625	226 576	227 529	228 484	229 441
48	230 400	231 361	232 324	233 289	234 256	235 255	236 196	237 169	238 144	239 121
49	240 100	241 081	242 064	243 049	244 036	245 025	246 016	247 009	248 004	249 001
50	250 000	251 001	252 004	253 009	254 016	255 025	256 036	257 049	258 064	259 031
51	260 100	261 121	262 144	263 169	264 196	265 225	266 256	267 289	268 324	269 361
52	270 400	271 441	272 484	273 529	274 576	275 625	276 676	277 729	278 784	279 841
53	280 900	281 961	293 024	284 089	285 156	286 225	287 296	288 369	289 444	290 521
54	291 600	292 681	293 764	294 849	295 936	297 025	298 116	299 209	300 304	301 401
55	302 500	303 601	304 704	305 809	306 916	308 025	309 136	310 249	311 364	312 481
56	313 600	314 721	315 844	316 969	318 096	319 225	320 356	321 489	322 624	323 761
57	324 900	326 041	327 184	328 329	329 476	330 625	331 776	332 929	334 084	335 241
58	336 400	337 561	338 724	339 889	341 056	342 225	343 396	344 569	345 744	346 921
59	348 100	349 281	350 464	351 649	352 836	354 025	355 216	356 409	357 604	358 801
60	360 000	361 201	362 404	363 609	364 816	366 025	367 236	368 449	369 664	370 881
61	372 100	373 321	374 544	375 769	376 996	378 225	379 456	380 689	381 924	383 161
62	384 400	385 641	386 884	388 129	389 376	390 625	391 876	393 129	394 384	395 641
63	396 900	398 161	399 424	400 689	401 956	403 225	404 496	405 769	407 044	408 321
64	409 600	410 881	412 164	413 449	414 736	416 025	417 316	418 609	419 904	421 201
65	422 500	423 801	425 104	426 409	427 716	429 025	430 336	431 649	432 964	434 281
66	435 600	436 921	438 244	439 569	440 986	442 225	443 556	444 889	446 224	447 561

Продолжение табл. I

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
67	448 900	450 241	451 584	452 929	454 276	455 625	456 976	458 329	459 684	461 041
68	462 400	463 761	465 124	466 489	467 856	469 225	470 596	471 969	473 344	474 721
69	476 100	477 481	478 864	480 249	481 636	483 025	484 416	487 809	486 204	488 601
70	490 000	491 401	492 804	494 209	495 616	497 025	498 436	499 849	501 264	502 681
71	504 100	505 521	506 944	508 369	509 796	511 225	512 656	514 089	515 524	516 961
72	518 400	519 841	521 284	522 729	524 176	525 625	527 076	528 529	529 984	531 441
73	532 900	534 361	535 824	537 289	538 756	540 225	541 696	543 169	544 644	546 121
74	547 600	549 081	550 564	552 049	553 536	555 025	556 516	558 009	559 504	56 101
75	562 500	564 001	565 504	567 009	568 516	570 025	571 536	573 049	574 564	576 081
76	577 600	579 121	580 644	582 169	583 696	585 225	586 756	588 289	589 824	591 361
77	592 900	594 441	595 984	597 529	599 076	600 625	602 176	603 729	605 284	606 841
78	608 400	609 961	611 524	613 089	614 656	616 225	617 796	619 369	620 944	622 521
79	624 100	625 681	627 264	628 849	630 436	632 025	633 616	635 209	636 804	638 401
80	640 000	641 601	643 204	644 809	646 416	648 025	649 636	651 249	652 864	654 481
81	656 100	657 721	659 344	660 969	662 596	664 225	665 856	667 489	669 124	670 761
82	672 400	674 041	675 684	677 329	678 976	680 062	682 276	683 929	685 584	687 241
83	688 900	690 561	692 224	693 889	695 556	697 725	698 896	700 569	702 244	703 921
84	705 600	707 281	708 964	710 649	712 336	714 025	715 716	717 409	719 104	720 801
85	722 500	724 201	725 904	727 609	729 316	731 025	732 736	734 449	736 164	737 881
86	739 600	741 321	743 044	744 769	746 496	748 225	749 956	751 689	753 424	755 161
87	756 900	758 641	760 384	762 129	763 876	765 625	767 376	769 129	770 884	772 641
88	774 400	776 161	777 924	779 689	781 456	783 225	784 996	786 769	788 544	790 321
89	792 100	793 881	795 664	797 449	799 236	801 025	802 816	804 609	806 404	808 201
90	810 000	811 801	813 604	815 409	817 216	819 025	820 836	822 649	824 464	826 281
91	828 100	829 921	831 744	833 569	835 396	837 225	839 056	840 889	842 724	844 561
92	846 400	848 241	850 084	851 929	853 776	855 625	857 476	859 329	861 184	863 041
93	864 900	866 761	868 624	870 489	872 356	874 225	876 096	877 969	879 844	881 721
94	883 600	885 481	887 364	889 249	891 136	893 025	894 916	896 809	808 704	900 601
95	902 500	904 401	906 304	908 209	910 116	912 025	913 936	915 849	917 764	919 681
96	921 600	923 521	925 444	927 369	929 296	931 225	933 156	935 089	937 024	938 961
97	940 900	942 841	944 784	946 729	948 676	950 625	952 576	954 529	956 484	958 441
98	960 400	962 361	964 324	966 289	968 256	970 225	972 196	974 169	976 144	978 121
99	980 100	982 081	984 064	986 049	988 036	990 025	992 016	994 009	996 004	998 001

Таблица II

Квадратные корни

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1,000	1,414	1,732	2,000	2,236	2,450	2,646	2,828	3,000
1	3,162	3,317	3,464	3,606	3,742	3,873	4,000	4,123	4,243	4,359
2	4,472	4,587	4,690	4,796	4,899	5,000	5,099	5,196	5,292	5,385
3	5,477	5,568	5,657	5,745	5,831	5,916	6,000	6,083	6,164	6,245
4	6,325	6,403	6,481	6,557	6,633	6,708	6,782	6,956	6,928	7,000
5	7,071	7,141	7,211	7,280	7,348	7,416	7,438	7,550	7,616	7,681
6	7,746	7,810	7,874	7,937	8,000	8,062	8,124	8,185	8,246	8,307
7	8,367	8,426	8,485	8,544	8,602	8,660	8,718	8,775	8,832	8,888
8	8,944	9,000	9,055	9,110	9,165	9,220	9,274	9,327	9,381	9,434
9	9,487	9,539	9,592	9,644	9,695	9,747	9,798	9,849	9,900	9,950
10	10,000	10,050	10,100	10,140	10,199	10,247	10,296	10,345	10,393	10,441
11	10,489	10,536	10,583	10,630	10,677	10,724	10,770	10,817	10,863	10,909
12	10,954	11,000	11,045	11,091	11,136	11,180	11,225	11,269	11,314	11,358
13	11,402	11,446	11,489	11,533	11,576	11,619	11,672	11,705	11,747	11,790
14	11,832	11,874	11,916	11,958	12,000	12,042	12,083	12,124	12,166	12,207
15	12,247	12,288	12,329	12,369	12,410	12,450	12,490	12,530	12,570	12,610
16	12,649	12,687	12,728	12,767	12,806	12,845	12,884	12,923	12,961	13,000
17	13,038	13,077	13,115	13,153	13,191	13,229	13,266	13,304	13,342	13,379
18	13,416	13,454	13,491	13,528	13,565	13,601	13,638	13,675	13,711	13,748
19	13,784	13,820	13,856	13,892	13,928	13,964	14,000	14,036	14,071	14,107
20	14,143	14,177	14,213	14,248	14,283	14,318	14,353	14,388	14,422	14,457
21	14,491	14,426	14,560	14,595	14,629	14,663	14,697	14,731	14,765	14,799
22	14,832	14,866	14,900	14,933	14,967	15,000	15,033	15,067	15,100	15,133
23	15,166	15,199	15,232	15,264	15,297	15,330	15,362	15,395	15,427	15,460
24	15,492	15,524	15,556	15,589	15,621	15,653	15,684	15,716	15,768	15,780
25	15,811	15,843	15,875	15,906	15,937	15,969	16,000	16,031	16,062	16,094
26	16,125	16,155	16,186	16,217	16,248	16,279	16,310	16,340	16,371	16,401
27	16,432	16,462	16,492	16,523	16,553	16,583	16,613	16,643	16,673	16,703
28	16,733	16,763	16,793	16,823	16,852	16,882	16,912	16,941	16,971	17,000
29	17,030	17,059	17,088	17,117	17,146	17,176	17,205	17,234	17,263	17,292
30	17,321	17,349	17,378	17,407	17,436	17,464	17,493	17,521	17,550	17,578
31	17,607	17,635	17,664	17,692	17,720	17,748	17,776	17,805	17,833	17,861
32	17,888	17,917	17,944	17,972	18,000	18,028	18,056	18,083	18,111	18,138

Продолжение табл. II

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
33	18,166	18,193	18,221	18,248	18,276	18,303	18,330	18,358	18,385	18,412
34	18,439	18,466	18,493	18,520	18,547	18,574	18,601	18,628	18,655	18,682
35	18,708	18,735	18,762	18,788	18,815	18,841	18,868	18,894	18,921	18,947
36	18,974	19,000	19,025	19,053	19,079	19,105	19,131	19,157	19,183	19,209
37	19,235	19,261	19,287	19,313	19,339	19,365	19,391	19,417	19,442	19,468
38	19,494	19,519	19,545	19,570	19,596	19,621	19,647	19,672	19,698	19,723
39	19,748	19,774	19,799	19,824	19,849	19,875	19,900	19,925	19,950	19,975
40	20,000	20,025	20,050	20,075	20,100	20,125	20,149	20,174	20,199	20,224
41	20,249	20,273	20,298	20,322	20,347	20,372	20,396	20,421	20,445	20,470
42	20,494	20,518	20,543	20,567	20,591	20,616	20,640	20,664	20,668	20,712
43	20,736	20,761	20,785	20,809	20,833	20,857	20,880	20,905	20,928	20,952
44	20,976	21,000	21,024	21,048	21,071	21,095	21,119	21,142	21,166	21,190
45	21,213	21,237	21,260	21,284	21,307	21,331	21,354	21,378	21,401	21,424
46	21,448	21,471	21,494	21,517	21,541	21,564	21,587	21,610	21,633	21,656
47	21,680	21,703	21,726	21,749	21,772	21,795	21,817	21,840	21,863	21,886
48	21,909	21,932	21,955	21,977	22,000	22,023	22,045	22,068	22,091	22,113
49	22,136	22,159	22,181	22,204	22,226	22,249	22,271	22,294	22,316	22,338
50	22,361	22,383	22,405	22,428	22,450	22,472	22,494	22,517	22,539	22,561
51	22,583	22,605	22,627	22,650	22,627	22,694	22,716	22,738	22,760	22,782
52	22,804	22,825	22,847	22,669	22,891	22,913	22,935	22,957	22,978	23,000
53	23,022	23,043	23,065	23,087	23,108	23,130	23,152	23,173	23,195	23,216
54	23,238	23,259	23,281	23,302	23,324	23,345	23,367	23,388	23,409	23,431
55	23,452	23,473	23,495	23,516	23,537	23,558	23,580	23,601	23,622	23,643
56	23,664	23,685	23,707	23,728	23,749	23,770	23,791	23,812	23,833	23,854
57	23,875	23,896	23,917	23,937	23,958	23,979	24,000	24,021	24,042	24,062
58	24,083	24,104	24,125	24,145	24,166	24,187	24,207	24,228	24,249	24,269
59	24,290	24,311	24,331	24,352	24,372	24,393	24,413	24,434	24,454	24,475
60	24,495	24,515	24,536	24,556	24,576	24,597	24,617	24,637	24,658	24,678
61	24,698	24,718	24,739	24,759	24,779	24,799	24,819	24,840	24,860	24,880
62	24,900	24,920	24,940	24,960	24,980	25,000	25,020	25,040	25,060	25,080
63	25,100	25,120	25,140	25,160	25,179	25,199	25,219	25,239	25,259	25,278
64	25,298	25,318	25,338	25,357	25,377	25,397	25,417	25,436	25,456	25,476
65	25,495	25,515	25,534	25,554	25,573	25,593	25,613	25,632	25,652	25,671
66	25,691	25,710	25,729	25,749	25,768	25,788	25,807	25,826	25,846	25,865

Продолжение табл. II

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
67	25,884	25,904	25,923	25,942	25,962	25,981	26,000	26,019	26,230	26,249
68	26,077	26,096	26,115	26,134	26,153	26,173	26,192	26,211	26,230	26,249
69	26,268	26,287	26,306	26,325	26,344	26,363	26,382	26,401	26,420	26,439
70	26,458	26,476	26,495	26,517	26,533	26,552	26,571	26,590	26,608	26,627
71	26,646	26,665	26,683	26,702	26,721	26,740	26,758	26,777	26,796	26,814
72	26,833	26,851	26,870	26,889	26,907	26,926	26,944	26,963	26,982	27,000
73	27,019	27,037	27,056	27,074	27,092	27,111	27,129	27,148	27,166	27,185
74	27,203	27,221	27,240	27,258	27,276	27,295	27,313	27,331	27,350	27,368
75	27,386	27,404	27,423	27,441	27,459	27,477	27,496	27,514	27,532	27,550
76	27,568	27,586	27,604	27,623	27,641	27,659	27,677	27,695	27,713	27,731
77	27,749	27,767	27,785	27,803	27,821	27,839	27,857	27,875	27,893	27,911
78	27,929	27,946	27,964	27,982	28,000	28,018	28,036	27,056	28,071	28,089
79	28,107	28,125	28,143	28,160	28,178	28,196	28,214	28,231	28,249	28,267
80	28,284	28,302	28,320	28,337	28,355	28,373	28,390	28,408	28,425	28,443
81	28,461	28,478	28,496	28,513	28,531	28,548	28,566	28,583	28,601	28,618
82	28,636	28,653	28,671	28,688	28,705	28,723	28,740	28,758	28,775	28,792
83	28,810	28,827	28,844	28,862	28,879	28,896	28,914	28,931	28,948	28,966
84	28,983	29,000	29,017	29,035	29,052	29,069	29,086	29,103	29,120	29,138
85	29,155	29,172	29,189	29,206	29,223	29,240	29,258	29,275	29,292	29,309
86	29,326	29,343	29,360	29,377	29,394	29,411	29,428	29,445	29,462	29,479
87	29,496	29,513	29,530	29,547	29,564	29,580	29,597	29,614	29,613	29,643
88	29,665	29,682	29,699	29,715	29,732	29,749	29,766	29,783	29,799	29,816
89	29,833	29,850	29,866	29,883	29,900	29,917	29,933	29,950	29,967	29,983
90	30,000	30,017	30,033	30,050	30,067	30,083	30,100	30,116	30,133	30,150
91	30,166	30,183	30,199	30,216	30,232	30,249	30,265	30,282	30,299	30,315
92	30,332	30,348	30,365	30,381	30,397	30,414	30,430	30,447	30,463	30,480
93	30,496	30,512	30,529	30,545	30,561	30,579	30,594	30,611	30,627	30,643
94	30,659	30,676	30,692	30,708	30,725	30,741	30,757	30,773	30,790	30,806
95	30,822	30,838	30,855	30,871	30,887	30,903	30,919	30,935	30,952	30,968
96	30,984	31,000	31,016	31,032	31,048	31,064	31,081	31,097	31,113	31,129
97	31,145	31,161	31,177	31,193	31,209	31,225	31,241	31,257	31,273	31,289
98	31,305	31,321	31,337	31,353	31,369	31,385	31,401	31,417	31,433	31,448
99	31,464	31,480	31,496	31,512	31,528	31,544	31,560	31,575	31,591	31,607

Таблица III

Десятичные логарифмы чисел (мантиссы)

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0775
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2088	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2210	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6011

Продолжение табл. III

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8092	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445

Продолжение табл. III

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9268	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9468	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Антилогарифмы

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1038	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1269	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1588	1542	1545
19	1449	1552	1556	1560	1565	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133

Продолжение табл. IV

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2686
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4496	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4503	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5884	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6100	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6485	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7123	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7944	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8188	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8355	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9868	9908	9931	9954	9977

Таблица V

Первая функция нормированного отклонения $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$

(ординаты нормальной кривой)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39 894	39 892	39 886	39 876	39 862	39 884	39 822	39 797	39 767	39 733
0,1	39 695	39 654	39 608	39 559	39 505	39 448	39 387	39 322	39 253	39 181
0,2	39 104	39 024	38 940	38 853	38 762	38 667	38 568	38 466	38 361	38 251
0,3	38 139	38 023	37 903	37 780	37 654	37 524	37 391	37 255	37 115	36 973
0,4	36 827	36 678	36 526	36 371	36 213	36 053	36 889	35 723	35 553	35 381
0,5	35 207	35 029	34 849	34 667	34 482	34 294	34 105	33 912	33 718	33 521
0,6	33 322	33 121	32 918	32 713	32 506	32 297	32 086	31 874	31 659	31 443
0,7	31 225	31 006	30 785	30 563	39 339	30 114	29 887	29 659	29 430	29 200
0,8	28 969	28 737	28 504	28 269	28 034	27 798	27 562	27 324	27 086	26 848
0,9	26 609	26 369	26 129	25 888	25 647	25 406	25 164	24 923	24 681	24 439
1,0	24 197	23 955	23 713	23 471	23 230	22 983	22 747	22 506	22 265	22 025
1,1	21 785	21 546	21 307	21 069	20 831	20 594	20 357	20 121	19 886	19 652
1,2	19 419	19 186	18 954	18 724	18 494	18 265	18 037	17 810	17 585	17 360
1,3	17 137	16 915	16 694	16 474	16 256	16 038	15 822	15 608	15 395	15 183
1,4	14 973	14 764	14 556	14 350	14 146	13 943	13 742	13 542	13 344	13 147
1,5	12 952	12 758	12 566	12 376	12 188	12 001	11 816	11 632	11 450	11 270
1,6	11 092	10 915	10 741	10 567	10 396	10 226	10 059	09 893	09 728	09 566
1,7	09 405	09 246	09 089	08 933	03 780	08 628	08 478	08 329	08 183	08 038
1,8	07 895	07 754	07 614	07 477	07 341	07 206	07 074	06 943	06 814	06 687
1,9	06 562	06 438	06 316	06 195	06 077	05 959	05 844	05 730	05 618	05 508
2,0	05 399	05 292	05 186	05 082	04 980	04 879	04 780	04 682	04 586	04 491
2,1	04 398	04 307	04 217	04 128	04 041	03 955	03 871	03 788	03 706	03 626
2,2	03 547	03 470	03 394	03 319	03 246	03 174	03 103	03 034	02 965	02 898
2,3	02 833	02 768	02 705	02 643	02 582	02 522	02 463	02 406	02 349	02 294
2,4	02 239	02 186	02 134	02 083	02 033	01 984	01 936	01 888	01 824	01 797
2,5	01 753	01 709	01 667	01 625	01 585	01 545	01 506	01 468	01 431	01 394
2,6	01 358	01 323	01 289	01 256	01 223	01 191	01 160	01 130	01 100	01 071
2,7	01 042	01 014	00 987	00 961	00 935	00 909	00 885	00 861	00 837	00 814
2,8	00 792	00 770	00 748	00 727	00 707	00 687	00 668	00 649	00 631	00 613
2,9	00 595	00 578	00 562	00 545	00 530	00 514	00 499	00 485	00 470	00 457
3,0	00 443	00 430	00 417	00 405	00 393	00 381	00 370	00 358	00 348	00 337
3,1	00 327	00 317	00 307	00 298	00 288	00 279	00 271	00 262	00 254	00 246
3,2	00 238	00 231	00 224	00 216	00 210	00 203	00 196	00 190	00 184	00 178
3,3	00 172	00 167	00 161	00 156	00 151	00 146	00 141	00 136	00 132	00 127
3,4	00 123	00 119	00 115	00 111	00 107	00 104	00 100	00 097	00 094	00 090
3,5	00 087	00 084	00 081	00 079	00 076	00 073	00 071	00 068	00 066	00 063
3,6	00 061	00 059	00 057	00 055	00 053	00 051	00 049	00 047	00 046	00 044
3,7	00 042	00 041	00 039	00 038	00 037	00 035	00 034	00 033	00 031	00 030
3,8	00 029	00 028	00 027	00 026	00 025	00 024	00 023	00 022	00 021	00 021
3,9	00 020	00 019	00 018	00 018	00 017	00 016	00 016	00 015	00 014	00 014
4,0	00 013	00 009	00 006	00 004	00 002	00 002	00 001	00 001	00 000	00 000

Стандартные значения преобразованного критерия Фишера $F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} : (\sigma_1^2 > \sigma_2^2)$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	167,5 34,1 10,1	148,5 30,8 9,6	141,1 29,5 9,3	137,1 28,7 9,1	134,6 28,2 9,0	132,9 27,9 8,9	131,8 27,7 8,9	130,6 27,5 8,8	130,0 27,4 8,8	129,5 27,2 8,8	128,9 27,1 8,8	128,3 27,1 8,7
4	74,1 21,2 7,7	61,2 18,8 6,9	56,1 16,7 6,6	53,4 16,0 6,4	51,7 15,5 6,3	50,5 15,2 6,2	49,8 15,0 6,1	49,0 14,8 6,0	48,6 14,7 6,0	48,2 14,7 6,0	47,8 14,5 5,9	47,4 14,4 5,9
5	47,0 16,3 6,6	36,6 13,3 5,8	33,2 12,1 5,4	31,1 11,4 5,2	29,8 11,0 5,1	28,8 10,7 5,0	28,2 10,5 4,9	27,6 10,3 4,8	27,3 10,2 4,8	27,0 10,1 4,7	26,7 10,0 4,7	26,4 9,9 4,7
6	35,5 13,4 6,0	27,0 10,9 5,1	23,7 9,8 4,8	21,9 9,2 4,5	20,8 8,8 4,4	20,0 8,5 4,3	19,5 8,3 4,2	19,0 8,1 4,1	18,8 8,0 4,1	18,5 7,9 4,1	18,3 7,8 4,0	18,0 7,7 4,0
7	29,2 12,3 5,6	21,7 9,6 4,7	18,8 8,5 4,4	17,2 7,9 4,1	16,2 7,5 4,0	15,5 7,2 3,9	15,1 7,0 3,8	14,6 6,8 3,7	14,4 6,7 3,7	14,2 6,6 3,6	13,9 6,5 3,6	13,7 6,4 3,6
8	25,4 11,3 5,3	18,5 8,7 4,6	15,8 7,6 4,1	14,4 7,0 3,8	13,5 6,6 3,7	12,9 6,4 3,6	1э,5 6,2 3,5	12,0 6,0 3,4	11,8 5,9 3,4	11,6 5,8 3,3	11,4 5,7 3,3	11,2 5,7 3,3
9	22,9 10,6 5,1	16,4 8,0 4,3	13,9 7,0 3,6	12,6 6,4 3,6	11,7 6,1 3,5	11,1 5,8 3,4	10,8 5,6 3,3	10,4 5,5 3,2	10,2 5,4 3,2	10,0 5,3 3,1	9,8 5,2 3,1	9,6 5,1 3,1
10	21,0 10,0 5,0	14,9 7,9 4,1	12,3 6,6 3,7	11,3 6,0 3,5	10,5 5,6 3,3	9,9 5,4 3,2	9,6 5,2 3,1	9,2 5,1 3,1	9,0 5,0 3,0	8,9 4,9 2,9	8,7 4,8 2,9	8,5 4,7 2,9
11	19,7 9,7 4,8	13,8 7,2 4,0	11,6 6,2 3,6	10,4 5,7 3,4	9,6 5,3 3,2	9,1 5,1 3,1	8,8 4,9 3,0	8,4 4,7 3,0	8,2 4,6 2,9	8,0 4,5 2,9	7,8 4,5 2,8	7,6 4,4 2,8
12	18,6 9,3 4,8	12,3 6,9 3,9	10,8 6,0 3,5	9,6 5,4 3,3	8,9 5,1 3,1	8,4 4,8 3,0	8,1 4,7 2,9	7,7 4,5 2,9	7,5 4,4 2,8	7,4 4,3 2,8	7,2 4,2 2,7	7,0 4,2 2,7
13	17,8 9,1 4,7	12,3 6,7 3,8	10,2 5,7 3,4	9,1 5,2 3,2	8,4 4,9 3,0	7,9 4,6 2,9	7,6 4,4 2,8	7,2 4,3 2,8	7,0 4,2 2,7	6,9 4,1 2,7	6,7 4,0 2,6	6,5 4,0 2,6
14	17,1 8,9 4,6	11,7 6,5 3,7	9,7 5,6 3,3	8,6 5,0 3,1	7,9 4,7 3,0	7,4 4,5 2,9	7,1 4,3 2,8	6,8 4,1 2,7	6,6 4,0 2,7	6,5 3,9 2,6	6,3 3,9 2,6	6,1 3,8 2,5
15	16,6 8,7 4,5	11,3 6,4 3,7	9,3 5,4 3,3	8,3 4,9 3,1	7,6 4,6 2,9	7,1 4,3 2,8	6,8 4,1 2,7	6,5 4,0 2,6	6,3 3,9 2,6	6,2 3,8 2,5	6,0 3,7 2,5	5,8 3,6 2,5
16	16,1 8,5 4,5	11,0 6,2 3,6	9,0 5,3 3,2	7,9 4,8 3,0	7,3 4,4 2,9	6,8 4,2 2,7	6,5 4,0 2,7	6,2 3,9 2,6	6,1 3,8 2,5	5,9 3,7 2,5	5,8 3,6 2,5	5,6 3,5 2,4

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	ν_1 / ν_2
127,7 26,9 8,7	127,1 26,8 8,7	126,5 26,7 8,7	125,9 26,6 8,6	125,6 26,5 8,6	125,3 26,4 8,6	125,0 26,4 8,6	124,7 26,3 8,6	124,4 26,2 8,6	124,1 26,2 8,5	123,8 26,1 8,5	123,5 26,1 8,5	3
47,0 14,2 5,9	46,6 14,1 5,8	46,2 14,0 5,8	45,8 13,9 5,8	45,6 13,8 5,7	45,4 13,7 5,7	45,2 13,7 5,7	45,0 13,6 5,7	44,7 13,5 5,7	44,5 13,5 5,7	44,3 13,5 5,6	44,1 13,5 5,6	4
26,1 9,8 4,6	25,8 9,7 4,6	25,4 9,6 4,6	25,1 9,5 4,5	24,9 9,4 4,5	24,8 9,3 4,5	24,6 9,2 4,4	24,5 9,1 4,4	24,3 9,1 4,4	24,1 9,1 4,4	24,0 9,0 4,4	23,8 9,0 4,4	5
17,7 7,6 3,9	17,5 7,5 3,9	17,2 7,4 3,8	16,9 7,3 3,8	16,8 7,2 3,8	16,6 7,1 3,8	16,5 7,1 3,7	16,4 7,0 3,7	16,2 7,0 3,7	16,1 6,9 3,7	15,9 6,9 3,7	15,8 6,9 3,7	6
13,5 6,3 3,5	13,2 6,2 3,5	13,0 6,1 3,4	12,7 6,0 3,4	12,6 5,9 3,4	12,5 5,9 3,3	12,3 5,9 3,3	12,2 5,8 3,3	12,1 5,8 3,3	12,0 5,7 3,3	11,8 5,7 3,2	11,7 5,7 3,2	7
11,0 5,6 3,2	10,8 5,5 3,2	10,5 5,4 3,2	10,3 5,3 3,1	10,2 5,2 3,1	10,1 5,1 3,1	10,0 5,1 3,0	9,9 5,0 3,0	9,7 5,0 3,0	9,6 4,9 3,0	9,5 4,9 2,9	9,4 4,9 2,9	8
9,4 5,0 3,0	9,2 4,9 3,0	8,9 4,8 2,9	8,7 4,7 2,9	8,6 4,6 2,9	8,5 4,5 2,8	8,4 4,5 2,8	8,3 4,4 2,8	8,1 4,4 2,8	8,0 4,4 2,7	7,9 4,3 2,7	7,8 4,3 2,7	9
8,3 4,6 2,8	8,1 4,5 2,8	7,8 4,4 2,7	7,6 4,3 2,7	7,5 4,3 2,7	7,4 4,2 2,6	7,3 4,1 2,6	7,2 4,1 2,6	7,1 4,0 2,6	7,0 4,0 2,6	6,9 3,9 2,6	6,8 3,9 2,5	10
7,4 4,3 2,7	7,3 4,2 2,7	7,1 4,1 2,7	6,9 4,0 2,6	6,8 3,9 2,6	6,7 3,9 2,5	6,6 3,8 2,5	6,5 3,7 2,5	6,3 3,7 2,5	6,2 3,7 2,4	6,1 3,6 2,4	6,0 3,6 2,4	11
6,8 4,1 2,6	6,7 4,0 2,6	6,5 3,9 2,5	6,3 3,8 2,5	6,2 3,7 2,5	6,1 3,6 2,4	6,0 3,6 2,4	5,9 3,5 2,4	5,7 3,5 2,4	5,6 3,4 2,3	5,6 3,4 2,3	5,4 3,4 2,3	12
6,3 3,9 2,6	6,2 3,8 2,5	6,0 3,7 2,5	5,8 3,6 2,4	5,7 3,5 2,4	5,6 3,4 2,3	5,5 3,4 2,3	5,4 3,3 2,3	5,3 3,3 2,3	5,2 3,2 2,2	5,1 3,2 2,2	5,0 3,2 2,2	13
5,9 3,7 2,5	5,8 3,6 2,4	5,6 3,5 2,4	5,4 3,4 2,4	5,3 3,3 2,3	5,2 3,3 2,3	5,1 3,2 2,2	5,0 3,1 2,2	4,9 3,1 2,2	4,8 3,1 2,2	4,7 3,0 2,1	4,6 3,0 2,1	14
5,6 3,5 2,4	5,5 3,4 2,4	5,3 3,3 2,3	5,1 3,2 2,3	5,0 3,2 2,3	4,9 3,1 2,2	4,8 3,1 2,2	4,7 3,0 2,2	4,6 3,0 2,1	4,5 2,9 2,1	4,4 2,9 2,1	4,3 2,9 2,1	15
5,4 3,5 2,4	5,3 3,4 2,3	5,1 3,3 2,3	4,9 3,2 2,2	4,8 3,1 2,2	4,7 3,0 2,2	4,6 3,0 2,1	4,5 2,9 2,1	4,4 2,9 2,1	4,3 2,8 2,0	4,2 2,8 2,0	4,1 2,8 2,0	16

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17	15,7 8,4 4,5	10,7 6,1 3,6	8,7 5,2 3,2	7,7 4,7 3,0	7,0 4,3 2,9	6,6 4,1 3,7	6,3 3,9 2,7	6,0 3,8 2,6	5,8 3,7 2,5	5,7 3,6 2,5	5,5 3,5 2,5	5,3 3,5 2,4
18	15,4 8,3 4,4	10,4 6,0 3,5	8,5 5,1 3,2	7,5 4,6 2,9	6,8 4,2 2,8	6,4 4,0 2,7	6,1 3,8 2,6	5,8 3,7 2,5	5,6 3,6 2,5	5,5 3,5 2,4	5,3 3,4 2,4	5,1 3,4 2,3
19	15,1 8,2 4,4	10,2 5,9 3,5	8,3 5,0 3,1	7,3 4,5 2,9	6,6 4,2 2,7	6,2 3,9 2,6	5,9 3,8 2,5	5,6 3,6 2,5	5,5 3,5 2,4	5,3 3,4 2,4	5,2 3,4 2,4	5,0 3,3 2,3
20	14,8 8,1 4,3	10,0 5,8 3,5	8,1 4,9 3,1	7,1 4,4 2,9	6,5 4,1 2,7	6,0 3,9 2,6	5,7 3,7 2,5	5,4 3,6 2,4	5,3 3,4 2,4	5,1 3,4 2,3	5,0 3,3 2,3	4,8 3,2 2,3
21	14,6 8,0 4,3	9,8 5,8 3,5	7,9 4,9 3,1	7,0 4,4 2,8	6,3 4,0 2,7	5,9 3,8 2,6	5,6 3,6 2,5	5,3 3,5 2,4	5,2 3,4 2,4	5,0 3,3 2,3	4,9 3,2 2,3	4,7 3,2 2,2
22	14,4 7,9 4,3	9,6 5,7 3,4	7,8 4,8 3,0	6,8 4,3 2,8	6,2 4,0 2,7	5,8 3,8 2,6	5,5 3,6 2,5	5,2 3,4 2,4	5,1 3,3 2,4	4,9 3,3 2,3	4,8 3,2 2,3	4,6 3,1 2,2
23	14,2 7,9 4,3	9,5 5,7 3,4	7,7 4,8 3,0	6,7 4,3 2,8	6,1 4,0 2,6	5,6 3,7 2,5	5,4 3,5 2,4	5,1 3,4 2,4	5,0 3,3 2,3	4,8 3,2 2,3	4,7 3,1 2,2	4,5 3,1 2,2
24	14,0 7,8 4,3	9,3 5,6 3,4	7,6 4,7 3,0	6,6 4,2 2,8	6,0 3,9 2,6	5,6 3,7 2,5	5,3 3,5 2,4	5,0 3,4 2,4	4,9 3,2 2,3	4,7 3,2 2,3	4,6 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2
25	13,9 7,8 4,2	9,2 5,6 3,4	7,5 4,7 3,0	6,5 4,2 2,8	5,9 3,9 2,6	5,5 3,6 2,5	5,2 3,5 2,4	4,9 3,3 2,3	4,8 3,2 2,3	4,6 3,1 2,2	4,5 3,0 2,2	4,3 3,0 2,2
26	13,7 7,7 4,2	9,1 5,5 3,4	7,4 4,6 3,0	6,4 4,1 2,7	5,8 3,8 2,6	5,4 3,6 2,5	5,1 3,4 2,4	4,8 3,3 2,3	4,7 3,2 2,3	4,5 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,2 3,0 2,1
27	13,6 7,7 4,2	9,0 5,5 3,3	7,3 4,6 3,0	6,3 4,1 2,7	5,7 3,8 2,6	5,3 3,6 2,5	5,1 3,4 2,4	4,8 3,3 2,3	4,7 3,1 2,2	4,5 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1
28	13,5 7,6 4,2	8,9 5,4 3,3	7,2 4,6 2,9	6,3 4,1 2,7	5,7 3,8 2,6	5,2 3,5 2,4	5,0 3,4 2,4	4,7 3,2 2,3	4,6 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,3 2,9 2,1	4,1 2,9 2,1
29	13,4 7,6 4,2	8,9 5,4 3,3	7,1 4,5 2,9	6,2 4,0 2,7	5,6 3,7 2,5	5,2 3,5 2,4	5,0 3,3 2,3	4,7 3,2 2,3	4,6 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,3 2,9 2,1	4,1 2,9 2,1
30	13,3 7,6 4,2	8,8 5,4 3,3	7,1 4,5 2,9	6,1 4,0 2,7	5,5 3,7 2,5	5,1 3,5 2,4	4,9 3,3 2,3	4,6 3,2 2,3	4,5 3,1 2,2	4,3 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1
32	13,2 7,5 4,1	8,7 5,3 3,3	7,0 4,5 2,9	6,0 4,0 2,7	5,4 3,7 2,5	5,0 3,4 2,4	4,8 3,2 2,3	4,5 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1	4,1 2,9 2,1	3,9 2,8 2,1

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	ν_1 / ν_2
5,1 3,4 2,3	5,0 3,3 2,3	4,8 3,2 2,2	4,6 3,1 2,2	4,5 3,0 2,2	4,4 2,9 2,1	4,3 2,9 2,1	4,3 2,8 2,0	4,2 2,8 2,0	4,1 2,7 2,0	4,0 2,7 2,0	3,9 2,7 2,0	17
5,0 3,3 2,3	4,8 3,2 2,2	4,7 3,1 2,2	4,5 3,0 2,1	4,4 2,9 2,1	4,3 2,8 2,1	4,2 2,8 2,0	4,1 2,7 2,0	4,0 2,7 2,0	3,9 2,6 1,9	3,8 2,6 1,9	3,7 2,6 1,9	18
4,8 3,2 2,3	4,7 3,1 2,2	4,5 3,0 2,1	4,4 2,9 2,1	4,2 2,9 2,1	4,1 2,8 2,0	4,0 2,7 2,0	3,9 2,6 2,0	3,8 2,6 1,9	3,7 2,5 1,9	3,6 2,5 1,9	3,5 2,5 1,9	19
4,7 3,1 2,2	4,5 3,0 2,2	4,4 2,9 2,1	4,2 2,9 2,1	4,1 2,8 2,0	4,0 2,7 2,0	3,9 2,6 2,0	3,8 2,6 1,9	3,7 2,5 1,9	3,6 2,5 1,9	3,5 2,4 1,8	3,4 2,4 1,8	20
4,5 3,1 2,2	4,4 3,0 2,1	4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,0	3,9 2,7 2,0	3,8 2,6 2,0	3,7 2,6 1,9	3,6 2,5 1,9	3,6 2,5 1,9	3,5 2,4 1,8	3,4 2,4 1,8	3,3 2,4 1,8	21
4,4 3,0 2,2	4,3 2,9 2,1	4,1 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,8 2,7 2,0	3,7 2,6 1,9	3,6 2,5 1,9	3,6 2,5 1,8	3,5 2,4 1,8	3,4 2,4 1,8	3,3 2,3 1,8	3,2 2,3 1,8	22
4,3 3,0 2,1	4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,0	3,8 2,7 2,0	3,7 2,6 2,0	3,6 2,5 1,9	3,5 2,5 1,9	3,5 2,4 1,8	3,4 2,4 1,8	3,3 2,3 1,8	3,2 2,3 1,8	3,1 2,3 1,8	23
4,2 2,9 2,1	4,1 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,7 1,9	3,6 2,6 1,9	3,5 2,5 1,9	3,4 2,4 1,9	3,4 2,4 1,8	3,3 2,3 1,8	3,2 2,3 1,8	3,1 2,2 1,7	3,0 2,2 1,7	24
4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,6 2,0	3,6 2,5 1,9	3,5 2,4 1,9	3,4 2,4 1,8	3,3 2,3 1,8	3,2 2,3 1,8	3,1 2,2 1,7	3,0 2,2 1,7	2,9 2,2 1,7	25
4,1 2,9 2,1	3,9 2,8 2,0	3,8 2,7 2,0	3,6 2,6 1,9	3,5 2,5 1,9	3,4 2,4 1,8	3,3 2,4 1,8	3,2 2,3 1,8	3,1 2,2 1,8	3,0 2,2 1,7	2,9 2,1 1,7	2,8 2,1 1,7	26
4,0 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,6 1,9	3,5 2,5 1,9	3,4 2,5 1,9	3,3 2,4 1,8	3,2 2,3 1,8	3,2 2,2 1,8	3,1 2,2 1,7	3,0 2,2 1,7	2,9 2,1 1,7	2,8 2,1 1,7	27
4,0 2,8 2,1	3,8 2,7 2,0	3,7 2,6 2,0	3,5 2,5 1,9	3,4 2,4 1,9	3,3 2,3 1,8	3,2 2,3 1,8	3,1 2,2 1,7	3,0 2,2 1,7	3,9 2,1 1,7	2,8 2,1 1,7	2,7 2,1 1,6	28
3,0 2,8 2,0	3,8 2,7 2,0	3,6 2,6 1,9	3,4 2,5 1,9	3,3 2,4 1,8	3,2 2,3 1,8	3,1 2,3 1,8	3,0 2,2 1,7	2,9 2,1 1,7	2,8 2,1 1,7	2,7 2,1 1,6	2,6 2,0 1,6	29
3,9 2,7 2,0	3,7 2,7 2,0	3,6 2,5 1,9	3,4 2,5 1,9	3,3 2,4 1,8	3,2 2,3 1,8	3,1 2,2 1,8	3,0 2,2 1,7	2,9 2,1 1,7	2,8 2,1 1,7	2,7 2,0 1,6	2,6 2,0 1,6	30
3,8 2,7 2,0	3,7 2,6 2,0	3,5 2,4 1,9	3,4 2,4 1,9	3,2 2,3 1,8	3,2 2,2 1,8	3,1 2,2 1,7	3,0 2,1 1,7	2,8 2,1 1,7	2,7 2,0 1,6	2,6 2,0 1,6	2,5 2,0 1,6	31

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
34	13,1 7,4 4,1	8,6 5,3 3,3	7,0 4,4 2,9	6,0 3,9 2,7	5,4 3,6 2,5	5,0 3,4 2,4	4,8 3,2 2,3	4,5 3,1 2,2	4,4 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1	4,1 2,8 2,1	3,9 2,8 2,1
36	13,0 7,4 4,1	8,6 5,2 3,3	6,9 4,4 2,9	5,9 3,9 2,6	5,3 3,6 2,5	4,9 3,3 2,4	4,7 3,2 2,3	4,4 3,0 2,2	4,3 2,9 2,1	4,1 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,8 2,7 2,0
38	12,9 7,3 4,1	8,5 5,2 3,2	6,8 4,3 2,8	5,8 3,9 2,6	5,3 3,5 2,5	4,9 3,3 2,3	4,7 3,1 2,3	4,4 3,0 2,2	4,3 2,9 2,1	4,1 2,8 2,1	4,0 2,7 2,1	3,8 2,7 2,0
40	12,8 7,3 4,1	8,4 5,2 3,2	6,7 4,3 2,8	5,8 3,8 2,6	5,2 3,5 2,5	4,8 3,3 2,3	4,6 3,1 2,2	4,3 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,7 2,0
42	12,7 7,3 4,1	8,3 5,1 3,2	6,7 4,3 2,8	5,7 3,8 2,6	5,2 3,5 2,4	4,8 3,3 2,3	4,6 3,1 2,2	4,3 3,0 2,2	4,2 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,6 2,0
44	12,5 7,2 4,1	8,2 5,1 3,2	6,6 4,3 2,8	5,6 3,8 2,6	5,1 3,5 2,4	4,7 3,2 2,3	4,5 3,1 2,2	4,2 2,9 2,2	4,1 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,8 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0
46	12,4 7,2 4,0	8,1 5,1 3,2	6,5 4,2 2,8	5,6 3,8 2,6	5,0 3,4 2,4	4,6 3,2 2,3	4,4 3,0 2,2	4,1 2,9 2,1	4,0 2,8 2,1	3,8 2,7 2,0	3,7 2,7 2,0	3,5 2,6 2,0
48	12,3 7,2 4,0	8,1 5,1 3,2	6,4 4,2 2,8	5,5 3,7 2,6	5,0 3,4 2,4	4,6 3,2 2,3	4,4 3,0 2,2	4,1 2,8 2,1	4,0 2,8 2,1	3,8 2,7 2,0	3,7 2,6 2,0	3,5 2,6 2,0
50	12,2 7,2 4,0	8,0 5,2 3,2	6,4 4,2 2,8	5,4 3,7 2,6	4,9 3,4 2,4	4,5 3,2 2,3	4,3 3,0 2,2	4,0 2,9 2,1	3,9 2,8 2,1	3,7 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,4 2,6 1,9
55	12,1 7,1 4,0	7,9 5,0 3,2	6,3 4,1 2,8	5,4 3,7 2,5	4,9 3,4 2,4	4,5 3,1 2,3	4,3 3,0 2,2	4,0 2,8 2,1	3,9 2,7 2,0	3,7 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9
60	12,0 7,1 4,0	7,8 5,0 3,1	6,2 4,1 2,8	5,3 3,6 2,5	4,8 3,3 2,4	4,4 3,1 2,2	4,2 2,9 2,2	3,9 2,8 2,1	3,8 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,5 2,6 1,9	3,3 2,5 1,9
65	11,9 7,0 4,0	7,7 5,0 3,1	6,1 4,1 2,7	5,2 3,6 2,5	4,7 3,3 2,4	4,3 3,1 2,2	4,1 2,9 2,1	3,8 2,8 2,1	3,7 2,7 2,0	3,5 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9	3,2 2,5 1,9
70	11,6 7,0 4,0	7,6 4,9 3,1	6,0 4,1 2,7	5,2 3,6 2,5	4,7 3,3 2,3	4,3 3,1 2,2	4,1 2,9 2,1	3,8 2,8 2,0	3,7 2,7 2,0	3,5 2,6 1,9	3,4 2,5 1,9	3,2 2,4 1,9
80	11,6 7,0 4,0	7,5 4,9 3,1	6,0 4,0 2,7	5,1 3,6 2,5	4,6 3,2 2,3	4,2 3,0 2,2	4,0 2,9 2,1	3,7 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9	3,3 2,5 1,9	3,1 2,4 1,9
100	11,5 6,9 3,9	7,4 4,8 3,1	5,9 4,0 2,7	5,0 3,5 2,5	4,5 3,2 2,3	4,1 3,0 2,2	3,9 2,8 2,1	3,7 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,4 2,5 1,9	3,3 2,4 1,9	3,1 2,4 1,8

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	ν_1 / ν_2
3,8 2,7 2,0	3,6 2,6 2,0	3,5 2,4 1,9	3,3 2,4 1,9	3,2 2,3 1,8	3,1 2,2 1,8	3,0 2,2 1,7	2,9 2,1 1,7	2,8 2,1 1,7	2,6 2,0 1,6	2,6 2,0 1,6	2,5 2,0 1,6	34
3,7 2,6 2,0	3,6 2,5 1,9	3,4 2,4 1,9	3,3 2,3 1,8	3,1 2,3 1,8	3,1 2,2 1,7	3,0 2,1 1,7	2,9 2,0 1,6	2,7 2,0 1,6	2,6 1,9 1,6	2,5 1,9 1,6	2,4 1,9 1,5	36
3,7 2,6 2,0	3,5 2,5 1,9	3,4 2,4 1,9	3,2 2,3 1,8	3,1 2,2 1,8	3,0 2,1 1,7	2,9 2,1 1,7	2,8 2,0 1,6	2,7 2,0 1,6	2,6 1,9 1,6	2,5 1,9 1,5	2,4 1,8 1,5	38
3,6 2,6 1,9	3,5 2,5 1,9	3,3 2,4 1,8	3,2 2,3 1,8	3,0 2,2 1,7	3,0 2,1 1,7	2,9 2,0 1,7	2,8 2,0 1,6	2,6 1,9 1,6	2,5 1,9 1,5	2,4 1,8 1,5	2,3 1,8 1,5	40
3,6 2,5 1,9	3,4 2,5 1,9	3,3 2,3 1,8	3,1 2,3 1,8	3,0 2,2 1,7	2,9 2,1 1,7	2,8 2,0 1,6	2,7 1,9 1,6	2,6 1,9 1,6	2,4 1,8 1,5	2,4 1,8 1,5	2,3 1,8 1,5	42
3,5 2,5 1,9	3,4 2,4 1,9	3,2 2,3 1,8	3,1 2,2 1,8	2,9 2,1 1,7	2,9 2,1 1,7	2,8 2,0 1,6	2,7 1,9 1,6	2,5 1,9 1,6	2,4 1,8 1,5	2,3 1,8 1,5	2,2 1,7 1,5	44
3,4 2,5 1,9	3,3 2,4 1,9	3,1 2,3 1,8	3,0 2,2 1,7	2,8 2,1 1,7	2,8 2,0 1,6	2,7 2,0 1,6	2,6 1,9 1,6	2,4 1,9 1,5	2,3 1,8 1,5	2,2 1,8 1,5	2,1 1,7 1,5	46
3,4 2,5 1,9	3,3 2,4 1,9	3,1 2,3 1,8	3,0 2,2 1,7	2,8 2,1 1,7	2,8 2,0 1,6	2,7 1,9 1,6	2,6 1,8 1,6	2,4 1,8 1,5	2,3 1,8 1,5	2,2 1,7 1,5	2,1 1,7 1,4	48
3,3 2,5 1,9	3,2 2,4 1,8	3,0 2,3 1,8	2,9 2,2 1,7	2,6 2,1 1,7	2,7 2,0 1,6	2,6 1,9 1,6	2,5 1,9 1,5	2,3 1,8 1,5	2,2 1,8 1,5	2,1 1,7 1,5	2,0 1,7 1,4	50
3,3 2,4 1,9	3,2 2,3 1,8	3,0 2,2 1,8	2,9 2,1 1,7	2,7 2,1 1,7	2,7 2,0 1,6	2,6 1,9 1,6	2,5 1,8 1,5	2,3 1,8 1,5	2,2 1,7 1,5	2,1 1,7 1,4	2,0 1,6 1,4	55
3,2 2,4 1,9	3,1 2,3 1,8	2,9 2,2 1,7	2,8 2,1 1,7	2,6 2,0 1,6	2,6 1,9 1,6	2,5 1,9 1,6	2,4 1,8 1,5	2,2 1,7 1,5	2,1 1,7 1,4	2,0 1,6 1,4	1,9 1,6 1,4	60
3,1 2,4 1,8	3,0 2,3 1,8	2,8 2,2 1,7	2,7 2,1 1,7	2,5 2,0 1,6	2,5 1,9 1,6	2,4 1,8 1,5	2,3 1,8 1,5	2,1 1,7 1,5	2,0 1,6 1,4	1,9 1,6 1,4	1,8 1,6 1,4	65
3,1 2,3 1,8	3,0 2,3 1,8	2,8 2,1 1,7	2,7 2,1 1,7	2,5 2,0 1,6	2,4 1,9 1,6	2,3 1,8 1,5	2,2 1,7 1,5	2,1 1,7 1,4	2,0 1,6 1,4	1,8 1,6 1,4	1,7 1,6 1,3	70
3,0 2,3 1,8	2,9 2,2 1,8	2,7 2,1 1,7	2,6 2,0 1,6	2,4 1,9 1,6	2,4 1,8 1,5	2,3 1,8 1,5	2,2 1,7 1,4	2,0 1,6 1,4	1,9 1,6 1,4	1,8 1,5 1,3	1,7 1,5 1,3	80
3,0 2,3 1,8	2,8 2,2 1,7	2,7 2,1 1,7	2,5 2,0 1,6	2,4 1,9 1,6	2,3 1,8 1,5	2,2 1,7 1,5	2,1 1,6 1,4	1,9 1,6 1,4	1,8 1,5 1,3	1,7 1,5 1,3	1,6 1,4 1,3	100

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
125	11,4	7,4	5,8	5,0	4,5	4,1	3,9	3,6	3,5	3,3	3,2	3,0
	6,8	4,8	3,9	3,5	3,2	2,9	2,8	2,6	2,6	2,5	2,4	2,3
	3,9	3,1	2,7	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,8
150	11,3	7,3	5,7	4,9	4,4	4,0	3,8	3,5	3,4	3,2	3,1	2,9
	6,8	4,7	3,9	3,4	3,1	2,9	2,8	2,6	2,5	2,4	2,4	2,3
	3,9	3,1	2,7	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8
200	11,2	7,2	5,6	4,8	4,3	3,9	3,7	3,5	3,4	3,2	3,1	2,9
	6,8	4,7	3,9	3,4	3,2	2,9	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,3
	3,9	3,0	2,6	2,4	2,3	2,1	2,0	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8
400	11,0	7,1	5,6	4,7	4,2	3,8	3,6	3,4	3,3	3,1	3,0	2,8
	6,7	4,7	3,8	3,4	3,1	2,8	2,7	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2
	3,9	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,8
1000	10,9	7,0	5,5	4,7	4,2	3,8	3,6	3,4	3,3	3,1	3,0	2,8
	6,7	4,6	3,8	3,4	3,3	3,0	2,8	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3
	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8
∞	10,8	6,9	5,4	4,6	4,1	3,7	3,5	3,4	3,2	3,0	2,9	2,7
	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2
	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,7
ν_1 / ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Таблица VII

Стандартные значения критерия Стьюдента (t_{st})

ν	t_1	t_2	t_3	ν	t_1	t_2	t_3
1	12,7	63,7	637,0	13	2,2	3,0	4,2
2	4,3	9,9	31,6	14—15	2,1	3,0	4,1
3	3,2	5,8	12,9	16—17	2,1	2,9	4,0
4	2,8	4,6	8,6	18—20	2,1	2,9	3,9
5	2,6	4,0	6,9	21—24	2,1	2,8	3,8
6	2,4	3,7	6,0	25—28	2,1	2,8	3,7
7	2,4	3,5	5,3	29—30	2,0	2,8	3,7
8	2,3	3,4	5,0	31—34	2,0	2,7	3,7
9	2,3	3,3	4,8	35—42	2,0	2,7	3,6
10	2,2	3,2	4,6	43—62	2,0	2,7	3,5
11	2,2	3,1	4,4	63—175	2,0	2,6	3,4
12	2,2	3,1	4,3	176 и больше	2,0	2,6	3,3

14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	ν_1 / ν_2
2,9	2,8	2,6	2,5	2,3	2,3	2,1	2,0	1,9	1,8	1,6	1,5	125
2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	
1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	
2,8	2,7	2,5	2,4	2,2	2,2	2,0	1,9	1,8	1,7	1,5	1,4	150
2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,6	1,5	1,4	1,4	1,3	
1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	
2,8	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	1,9	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	200
2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3	1,3	
1,7	1,7	1,6	1,6	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,3	1,2	1,2	
2,7	2,5	2,4	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	400
2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3	1,2	
1,7	1,7	1,6	1,5	1,4	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1	
2,7	2,5	2,4	2,2	2,1	2,0	1,8	1,7	1,6	1,5	1,3	1,2	1000
2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,4	1,2	1,1	
1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,4	1,3	1,3	1,2	1,1	1,1	
2,6	2,4	2,3	2,1	2,0	1,9	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,1	∞
2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,4	1,2	1,1	1,0	
1,7	1,6	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1	1,0	
14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	ν_2 \ ν_1

Таблица VIII

Стандартные значения критерия χ^2

ν	χ_1^2	χ_2^2	χ_3^2	ν	χ_1^2	χ_2^2	χ_3^2	ν	χ_1^2	χ_2^2	χ_3^2
1	3,8	6,6	10,8	18	28,9	34,8	42,3	40	55,8	63,7	73,4
2	6,0	9,2	13,8	19	30,1	36,6	43,8	42	58,1	66,2	76,1
3	7,8	11,3	16,3	20	31,4	37,6	45,3	44	60,5	68,7	78,7
4	9,5	13,3	18,5	21	32,7	38,9	46,8	46	62,8	71,2	81,4
5	11,1	15,1	20,5	22	33,9	40,3	48,3	48	65,2	73,7	84,0
6	12,6	16,8	22,5	23	35,2	41,6	49,7	50	67,5	76,2	86,7
7	14,1	18,5	24,3	24	36,4	43,0	51,2	55	73,3	82,3	93,2
8	15,5	20,1	26,1	25	37,7	44,3	52,6	60	79,1	88,4	99,6
9	16,9	21,7	27,9	26	38,9	45,6	54,1	65	84,8	94,4	106,0
10	18,3	23,2	29,6	27	40,1	47,0	55,5	70	90,5	100,4	112,3
11	19,7	24,7	31,3	28	41,3	48,3	56,9	75	96,2	106,4	118,5
12	21,0	26,2	32,9	29	42,6	49,6	58,3	80	101,9	112,3	124,8
13	22,4	27,7	34,5	30	43,8	50,9	59,7	85	107,5	118,2	131,0
14	23,7	29,1	36,1	32	46,2	53,5	62,4	90	113,1	124,1	137,1
15	25,0	30,6	37,7	34	48,6	56,0	65,2	95	118,7	130,0	143,3
16	26,3	32,0	39,3	36	51,0	58,6	67,9	100	124,3	135,8	149,4
17	27,6	33,4	40,8	38	53,4	61,1	70,7				

Таблица IX

Количество пар значений, достаточное для достоверности выборочного коэффициента корреляции (r) $\left(\hat{n} = \frac{t_2}{z_2} + 3\right)$

r	$\hat{n}$			r	$\hat{n}$			r	$\hat{n}$		
	$\beta_1 = 0{,}95$	$\beta_2 = 0{,}99$	$\beta_3 = 0{,}999$		$\beta_1 = 0{,}95$	$\beta_2 = 0{,}99$	$\beta_3 = 0{,}999$		$\beta_1 = 0{,}95$	$\beta_2 = 0{,}99$	$\beta_3 = 0{,}999$
	$t_1 = 1{,}96$	$t_2 = 2{,}58$	$t_3 = 3{,}30$		$t_1 = 1{,}96$	$t_2 = 2{,}58$	$t_3 = 3{,}30$		$t_1 = 1{,}96$	$t_2 = 2{,}58$	$t_3 = 3{,}30$
01	38 407	66 503	108 903	31	40	68	109	61	11	16	25
02	9 603	16 628	27 228	32	38	63	102	62	10	16	24
03	4 269	7 392	12 103	33	36	60	96	63	10	15	23
04	2 403	4 159	6 809	34	34	56	90	64	10	15	22
05	1 539	2 263	5 359	35	32	53	85	65	9	14	21
06	1 069	1 850	3 028	36	30	50	80	66	9	14	20
07	787	1 360	2 225	37	28	47	75	67	9	13	20
08	604	1 042	1 704	38	37	44	71	68	9	13	19
09	477	824	1 347	39	26	42	67	69	8	12	18
10	383	661	1 081	40	24	40	64	70	8	12	18
11	317	548	896	41	23	38	60	71	8	11	17
12	267	462	754	42	22	36	57	72	8	11	16
13	228	392	640	43	21	34	55	73	7	11	16
14	196	337	550	44	20	33	52	74	7	10	15
15	171	295	481	45	19	31	49	75	7	10	15
16	151	259	422	46	19	30	47	76	7	10	14
17	133	228	373	47	18	29	45	77	7	9	14
18	119	204	332	48	17	27	43	78	7	9	13
19	107	183	297	49	16	26	41	79	6	9	13
20	97	165	270	50	16	25	39	80	6	9	12
21	87	149	242	51	15	24	37	81	6	8	12
22	80	136	211	52	15	23	36	82	6	8	11
23	73	124	202	53	14	22	34	83	6	8	11
24	68	114	185	54	14	21	33	84	6	7	10
25	62	105	170	55	13	20	32	85	5	7	10
26	57	97	157	56	13	20	30	86	5	7	10
27	53	90	145	57	12	19	29	87	5	7	9
28	49	83	135	58	12	18	28	88	5	7	9
29	46	78	125	59	11	18	27	89	5	6	8
30	43	73	117	60	11	17	26	90	5	6	8

Таблица X

Угол φ в радианах $= 0{,}0349066 \arcsin \sqrt{p}$

p	Последние цифры долей и процентов										$p\%$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,0000	0,0000	0,0063	0,0089	0,0110	0,0126	0,0142	0,0155	0,0167	0,0179	0,0190	0,00
0,0001	0,0200	0,0210	0,0220	0,0288	0,0236	0,0245	0,0253	0,0261	0,0269	0,0276	0,01
0,0002	0,0283	0,0290	0,0297	0,0303	0,0310	0,0317	0,0323	0,0329	0,0335	0,0341	0,02
0,0003	0,0346	0,0352	0,0358	0,0363	0,0369	0,0374	0,0379	0,0385	0,0390	0,0394	0,03
0,0004	0,0400	0,0405	0,0410	0,0415	0,0420	0,0425	0,0429	0,0434	0,0438	0,0443	0,04
0,0005	0,0448	0,0452	0,0456	0,0460	0,0465	0,0469	0,0473	0,0478	0,0482	0,0486	0,05
0,0006	0,0490	0,0494	0,0498	0,0502	0,0506	0,0510	0,0514	0,0518	0,0522	0,0525	0,06
0,0007	0,0529	0,0533	0,0537	0,0540	0,0543	0,0547	0,0551	0,0555	0,0559	0,0562	0,07
0,0008	0,0566	0,0569	0,0573	0,0576	0,0580	0,0583	0,0587	0,0590	0,0593	0,0597	0,08
0,0009	0,0600	0,0604	0,0607	0,0610	0,0613	0,0616	0,0620	0,0623	0,0626	0,0629	0,09
0,001	0,0632	0,0664	0,0693	0,0721	0,0748	0,0775	0,0800	0,0824	0,0849	0,0872	0,1
0,002	0,0895	0,0917	0,0939	0,0959	0,0979	0,1000	0,1020	0,1039	0,1059	0,1078	0,2
0,003	0,1096	0,1114	0,1132	0,1149	0,1167	0,1184	0,1200	0,1217	0,1234	0,1250	0,3
0,004	0,1266	0,1282	0,1297	0,1312	0,1328	0,1343	0,1358	0,1373	0,1387	0,1401	0,4
0,005	0,1415	0,1429	0,1443	0,1457	0,1471	0,1485	0,1498	0,1511	0,1525	0,1538	0,5
0,006	0,1551	0,1563	0,1576	0,1589	0,1602	0,1614	0,1626	0,1639	0,1651	0,1664	0,6
0,007	0,1676	0,1687	0,1699	0,1711	0,1723	0,1734	0,1746	0,1757	0,1769	0,1780	0,7
0,008	0,1791	0,1808	0,1814	0,1825	0,1836	0,1847	0,1857	0,1868	0,1879	0,1890	0,8
0,009	0,1900	0,1911	0,1921	0,1932	0,1942	0,1953	0,1963	0,1973	0,1983	0,1993	0,9
0,01	0,2003	0,2102	0,2195	0,2285	0,2372	0,2456	0,2537	0,2615	0,2691	0,2765	1,
0,02	0,2838	0,2909	0,2978	0,3045	0,3111	0,3176	0,3239	0,3301	0,3363	0,3423	2,
0,03	0,3482	0,3540	0,3597	0,3654	0,3709	0,3764	0,3818	0,3871	0,3924	0,3976	3,
0,04	0,4027	0,4078	0,4128	0,4178	0,4227	0,4275	0,4323	0,4371	0,4418	0,4468	4,
0,05	0,4510	0,4556	0,4601	0,4646	0,4690	0,4735	0,4778	0,4822	0,4865	0,4907	5,
0,06	0,6094	0,6129	0,6163	0,6198	0,6232	0,6267	0,6301	0,6334	0,6368	0,6402	6,
0,07	0,5355	0,5391	0,5433	0,5472	0,5510	0,5548	0,5586	0,5624	0,5661	0,5698	7,
0,08	0,5735	0,5772	0,5808	0,5845	0,5881	0,5917	0,5953	0,5988	0,6024	0,6059	8,
0,09	0,6094	0,6129	0,6163	0,6198	0,6232	0,6267	0,6301	0,6334	0,6368	0,6402	9,
0,10	0,6435	0,6468	0,6501	0,6534	0,6567	0,6600	0,6632	0,6665	0,0669	0,7044	10,
0,11	0,6761	0,6793	0,6825	0,6897	0,6888	0,6920	0,6951	0,6982	0,7013	0,7044	11,
0,12	0,7075	0,7107	0,7136	0,7167	0,7197	0,7227	0,7258	0,7288	0,7318	0,7348	12,
0,13	0,7377	0,7407	0,7437	0,7466	0,7495	0,7525	0,7554	0,7583	0,7612	0,7641	13,

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	p%
0,14	0,7670	0,7699	0,7727	0,7756	0,7785	0,7813	0,7841	0,7800	0,7898	0,7926	14,
0,15	0,7954	0,7982	0,8010	0,8038	0,8065	0,8093	0,8121	0,8148	0,8176	0,8203	15,
0,16	0,8230	0,8258	0,8285	0,8312	0,8339	0,8366	0,8393	0,8420	0,8446	0,8473	16,
0,17	0,8500	0,8526	0,8553	0,8579	0,8606	0,8632	0,8658	0,8685	0,8711	0,8737	17,
0,18	0,8763	0,8789	0,8815	0,8841	0,8867	0,8892	0,8918	0,8944	0,8970	0,8995	18,
0,19	0,9021	0,9046	0,9071	0,9097	0,9122	0,9147	0,9173	0,9198	0,9223	0,9248	19,
0,20	0,9273	0,9298	0,9323	0,9348	0,9373	0,9397	0,9422	0,9447	0,9472	0,9496	20,
0,21	0,9521	0,9545	0,9570	0,9594	0,9619	0,9643	0,9667	0,9692	0,9716	0,9740	21,
0,22	0,9764	0,9788	0,9813	0,9836	0,9860	0,9884	0,9908	0,9932	0,9956	0,9980	22,
0,23	1,0004	1,0027	1,0051	1,0075	1,0098	1,0122	1,0146	1,0169	1,0193	1,0216	23,
0,24	1,0240	1,0262	1,0286	1,0310	1,0333	1,0356	1,0379	1,0403	1,0426	1,0449	24,
0,25	1,0472	1,0495	1,0518	1,0541	1,0564	1,0587	1,0610	1,0633	1,0656	1,0679	25,
0,26	1,0701	1,0724	1,0747	1,0770	1,0793	1,0815	1,0838	1,0860	1,0883	1,0906	26,
0,27	1,0928	1,0951	1,0973	1,0996	1,1018	1,1040	1,1063	1,1085	1,1107	1,1130	27,
0,28	1,1152	1,1174	1,1197	1,1219	1,1241	1,1263	1,1285	1,1307	1,1329	1,1352	28,
0,29	1,1374	1,1396	1,1418	1,1440	1,1462	1,1483	1,1505	1,1527	1,1549	1,1571	29,
0,30	1,1593	1,1615	1,1636	1,1658	1,1680	1,1702	1,1723	1,1745	1,1767	1,1788	30,
0,31	1,1810	1,1832	1,1853	1,1875	1,1896	1,1918	1,1969	1,1961	1,1982	1,2004	31,
0,32	1,2025	1,2045	1,2068	1,2090	1,2111	1,2132	1,2154	1,2175	1,2196	1,2218	32,
0,33	1,2239	1,2260	1,2281	1,2303	1,2324	1,2345	1,2366	1,2387	1,2408	1,2430	33,
0,34	1,2451	1,2472	1,2493	1,2514	1,2535	1,2556	1,2577	1,2598	1,2619	1,2640	34,
0,35	1,2661	1,2682	1,2703	1,2724	1,2745	1,2766	1,2787	1,2808	1,2828	1,2849	35,
0,36	1,2870	1,2891	1,2912	1,2933	1,2953	1,2974	1,2995	1,3016	1,3036	1,3057	36,
0,37	1,3078	1,3098	1,3119	1,3140	1,3161	1,3181	1,3202	1,3222	1,3243	1,3264	37,
0,38	1,3284	1,3305	1,3326	1,3346	1,3367	1,3387	1,3408	1,3428	1,3449	1,3469	38,
0,39	1,3490	1,3510	1,3531	1,3551	1,3572	1,3592	1,3613	1,3633	1,3654	1,3674	39,
0,40	1,3694	1,3715	1,3735	1,3756	1,3776	1,3796	1,3817	1,3837	1,3857	1,3877	40,
0,41	1,3898	1,3918	1,3939	1,3959	1,3979	1,3980	1,4020	1,4040	1,4061	1,4080	41,
0,42	1,4101	1,4121	1,4142	1,4162	1,4182	1,4202	1,4223	1,4243	1,4263	1,4283	42,
0,43	1,4303	1,4324	1,4344	1,4364	1,4384	1,4404	1,4424	1,4445	1,4465	1,4485	43,
0,44	1,4505	1,4525	1,4545	1,4566	1,4586	1,4606	1,4627	1,4646	1,4666	1,4686	44,
0,45	1,4706	1,4726	1,4748	1,4767	1,4787	1,4807	1,4827	1,4847	1,4867	1,4887	45,
0,46	1,4907	1,4927	1,4947	1,4967	1,4987	1,5007	1,5027	1,5048	1,5068	1,5088	46,
0,47	1,5108	1,5128	1,5148	1,5168	1,5188	1,5208	1,5228	1,5248	1,5268	1,5288	47,
0,48	1,5308	1,5328	1,5348	1,5368	1,5388	1,5408	1,5428	1,5448	1,5468	1,5488	48,

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	p%
0,49	1,5508	1,5528	1,5548	1,5568	1,5588	1,5608	1,5628	1,5648	1,5668	1,5688	49,
0,50	1,5708	1,5728	1,5748	1,5768	1,5788	1,5808	1,5828	1,5848	1,5868	1,5888	50,
0,51	1,5908	1,5928	1,5948	1,5968	1,5988	1,6008	1,6028	1,6048	1,6068	1,6088	51,
0,52	1,6108	1,6128	1,6148	1,6168	1,6188	1,6208	1,6228	1,6248	1,6268	1,6288	52,
0,53	1,6308	1,6328	1,6348	1,6368	1,6389	1,6409	1,6428	1,6449	1,6469	1,6489	53,
0,54	1,6509	1,6530	1,6549	1,6569	1,6589	1,6609	1,6629	1,6649	1,6669	1,6689	54,
0,55	1,6710	1,6730	1,6750	1,6770	1,6790	1,6810	1,6830	1,6850	1,6871	1,6891	55,
0,56	1,6911	1,6931	1,6951	1,6971	1,6992	1,7012	1,7032	1,7052	1,7076	1,7092	56,
0,57	1,7113	1,7133	1,7158	1,7173	1,7193	1,7214	1,7234	1,7254	1,7274	1,7295	57,
0,58	1,7315	1,7335	1,7355	1,7376	1,7396	1,7416	1,7437	1,7457	1,7477	1,7498	58,
0,59	1,7518	1,7538	1,7559	1,7579	1,7599	1,7620	1,7640	1,7660	1,7681	1,7701	59,
0,60	1,7722	1,7742	1,7762	1,7783	1,7803	1,7824	1,7844	1,7865	1,7885	1,7906	60,
0,61	1,7926	1,7947	1,7967	1,7988	1,8008	1,8029	1,8049	1,8070	1,8090	1,8111	61,
0,62	1,8132	1,8152	1,8172	1,8194	1,8214	1,8234	1,8255	1,8276	1,8297	1,8318	62,
0,63	1,8338	1,8359	1,8380	1,8400	1,8421	1,8442	1,8463	1,8484	1,8504	1,8525	63,
0,64	1,8546	1,8567	1,8588	1,8609	1,8629	1,8650	1,8671	1,8692	1,8713	1,8734	64,
0,65	1,8755	1,8776	1,8797	1,8818	1,8839	1,8860	1,8881	1,9802	1,8923	1,8944	65,
0,66	1,8965	1,8986	1,9008	1,9029	1,9050	1,9071	1,9092	1,9113	1,9135	1,9156	66,
0,67	1,9177	1,9198	1,9220	1,9241	1,9262	1,9284	1,9305	1,9326	1,9348	1,9369	67,
0,68	1,9391	1,9412	1,9434	1,9455	1,9477	1,9498	1,9520	1,9541	1,9563	1,9584	68,
0,69	1,9606	1,9628	1,9650	1,9671	1,9693	1,9714	1,9736	1,9758	1,9780	1,9801	69,
0,70	1,9823	1,9845	1,9867	1,9889	1,9911	1,9933	1,9954	1,9976	1,9998	2,0020	70,
0,71	2,0042	2,0065	2,0087	2,0109	2,0131	2,0153	2,0175	2,0197	2,0220	2,0242	71,
0,72	2,0264	2,0286	2,0309	2,0331	2,0353	2,0376	2,0398	2,0421	2,0443	2,0465	72,
0,73	2,0488	2,0511	2,0533	2,0556	2,0578	2,0601	2,0624	2,0646	2,0669	2,0692	73,
0,74	2,0715	2,0773	2,0760	2,0783	2,0806	2,0829	2,0852	2,0875	2,0890	2,0921	74,
0,75	2,0944	2,0967	9,0990	2,1013	2,1037	2,1060	2,1083	2,1106	2,1130	2,1153	75,
0,76	2,1117	2,1200	2,1223	2,1247	2,1270	2,1294	2,1388	2,1341	2,1365	2,1389	76,
0,77	2,1412	2,1436	2,1460	2,1484	2,1508	2,1532	2,1556	2,1580	2,1604	2,1628	77,
0,78	2,1652	2,1676	2,1700	2,1724	2,1749	2,1773	2,1797	2,1822	2,1846	2,1871	78,
0,79	2,1895	2,1920	2,1944	2,1969	2,1994	2,2019	2,2043	2,2068	2,2093	2,2118	79,
0,80	2,2143	2,2168	2,2193	2,2218	2,2243	2,2269	2,2294	2,2319	2,2345	2,2370	80,
0,81	2,2395	2,2421	2,2447	2,2472	2,2498	2,2524	2,2549	2,2575	2,2601	2,2627	81,
0,82	2,2653	2,2680	2,2705	2,2731	2,2759	2,2784	2,2810	2,2837	2,2863	2,2870	82,
0,83	2,2916	2,2943	2,2970	2,2996	2,3023	2,3050	2,3077	2,3104	2,3131	2,3158	83,

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	p%
0,84	2,3186	2,3213	2,3240	2,3268	2,3295	2,3323	2,3351	2,3378	2,3406	2,3434	84,
0,85	2,3462	2,3490	2,3518	2,3546	2,3575	2,3603	2,3631	2,3660	2,3689	2,3717	85,
0,86	2,3746	2,3775	2,3804	2,3833	2,3862	2,3891	2,3921	2,3950	2,3979	2,4009	86,
0,87	2,4039	2,4068	2,4098	2,4128	2,4158	2,4189	2,4219	2,4249	2,4280	2,4310	87,
0,88	2,4341	2,4372	2,4403	2,4436	2,4465	2,4496	2,4528	2,4559	2,4591	2,4623	88,
0,89	2,4655	2,4687	2,4719	2,4751	2,4784	2,4816	2,4849	2,4882	2,4915	2,4948	89,
0,90	2,4981	2,5014	2,5048	2,5082	2,5115	2,5150	2,5184	2,5218	2,5253	2,5287	90,
0,91	2,5322	2,5357	2,5392	2,5428	2,5463	2,5500	2,5535	2,5571	2,5608	2,5644	91,
0,92	2,5681	2,5718	2,5755	2,5792	2,5830	2,5868	2,5906	2,5944	2,5983	2,6022	92,
0,93	2,6061	2,6100	2,6140	2,6179	2,6220	2,6256	2,6301	2,6342	2,6383	2,6425	93,
0,94	2,6467	2,6509	2,6552	2,6594	2,6638	2,6681	2,6726	2,6770	2,6815	2,6856	94,
0,95	2,6906	2,6952	2,6998	2,7045	2,7093	2,7141	2,7189	2,7238	2,7288	2,7338	95,
0,96	2,7389	2,7440	2,7492	2,7545	2,7598	2,7652	2,7707	2,7763	2,7819	2,7876	96,
0,97	2,7934	2,7993	2,8054	2,8115	2,8177	2,8240	2,8305	2,8371	2,8439	2,8507	97,
0,98	2,8578	2,8650	2,8725	2,8801	2,8879	2,8960	2,9044	2,9131	2,9221	2,9114	98,
0,99	2,94126	2,94229	2,94332	2,94444	2,94538	2,94642	2,94745	2,94848	2,94952	2,95054	99,
0,991	2,95157	2,95266	2,95375	2,95484	2,95593	2,95702	2,95811	2,95920	2,96029	2,96138	99,1
0,992	2,96247	2,96363	2,96479	2,96595	2,96711	2,96827	2,96942	2,97058	2,97174	2,97290	99,2
0,993	2,97406	2,97531	2,97655	2,97780	2,97904	2,98023	2,98154	2,98278	2,98403	2,98507	99,3
0,994	2,98652	2,98787	2,98923	2,99058	2,99193	2,99329	2,99464	2,99599	2,99734	2,99870	99,4
0,995	3,00005	3,00155	3,00304	3,00458	3,00604	3,00754	3,00903	3,01053	3,01203	3,01352	99,5
0,996	3,01502	3,01672	3,01842	3,02011	3,02181	3,02351	3,02521	3,02691	3,02860	3,03030	99,6
0,997	3,03200	3,03401	3,03602	3,03804	3,04005	3,04206	3,04407	3,04608	3,04810	3,05011	99,7
0,998	3,05212	3,05474	3,05736	3,05999	3,06261	3,06523	3,06785	3,07047	3,07310	3,07522	99,8
0,9990	3,07834	3,07897	3,07961	3,08024	3,08087	3,08151	3,08214	3,08277	3,08340	3,08404	99,90
0,9991	3,08467	3,08530	3,08593	3,08657	3,08720	3,08783	3,08846	3,08909	3,08973	3,09036	99,91
0,9992	3,09099	3,09162	3,09226	3,09289	3,09352	3,09416	3,09479	3,09542	3,09605	3,09669	99,92
0,9993	3,09732	3,09795	3,09858	3,09922	3,09985	3,10048	3,10111	3,10174	3,10238	3,10301	99,93
0,9994	3,10364	3,10427	3,10491	3,10554	3,10617	3,10681	3,10744	3,10807	3,10870	3,10934	99,94
0,9995	3,10997	3,11060	3,11123	3,11187	3,11250	3,11313	3,11376	3,11439	3,11503	3,11566	99,95
0,9996	3,11629	3,11692	3,11756	3,11819	3,11882	3,11946	3,12009	3,12072	3,12135	3,12199	99,96
0,9997	3,12262	3,12325	3,12388	3,12452	3,12515	3,12578	3,12641	3,12704	3,12768	3,12831	99,97
0,9998	3,12894	3,12957	3,13020	3,13084	3,13147	3,13210	0,13273	3,13336	3,13399	3,13463	99,98
0,9999	3,13526	3,13589	3,13653	3,13716	3,13779	3,13843	0,13906	3,13969	3,14032	3,14096	99,99
1,0000	3,14159										

Числа Чебышева

5			6			7			8			9			10		
-2	+2	-1	-5	+5	-5	-3	+5	-1	-7	+7	-7	-4	+28	-14	-9	+6	-42
-1	-1	+2	-3	-1	+7	-2	0	+1	-5	+1	+5	-3	+7	+7	-7	+2	+14
0	-2	0	-1	-4	+4	-1	-3	+1	-3	-3	+7	-2	-8	+13	-5	-1	+35
+1	-1	-2	+1	-4	-4	0	-4	0	-1	-5	+3	-1	-17	+9	-3	-3	+31
+2	+2	+1	+3	-1	-7	+1	-3	-1	+1	-5	-3	0	-20	0	-1	-4	+12
			+5	+5	+5	+2	0	-1	+3	-3	-7	+1	-17	-9	+1	-4	-12
						+3	+5	+1	+5	+1	-5	+2	-8	-13	+3	-3	-31
									+7	+7	+7	+3	+7	-7	+5	-1	-35
												+4	+28	+14	+7	+2	-14
															+9	+6	+42
10	14	10	70	84	180	28	34	6	168	168	264	60	2772	990	330	132	8580

Продолжение табл. XI

11			12			13			14			15			16		
-5	+15	-30	-11	+55	-33	-6	+22	-11	-13	+13	-143	-7	+91	-91	-15	+35	-455
-4	+6	+6	-9	+25	+3	-5	+11	0	-11	+7	-11	-6	+52	-13	-13	+21	-91
-3	-1	+22	-7	+1	+21	-4	+2	+6	-9	+2	+66	-5	+19	+35	-11	+9	+143
-2	-6	+23	-5	-17	+25	-3	-5	+8	-7	-2	+98	-4	-8	+58	-9	-1	+267
-1	-9	+14	-3	-29	+19	-2	-10	+7	-5	-5	+95	-3	-29	+61	-7	-9	+301
0	-10	0	-1	-35	+7	-1	-13	+4	-3	-7	+67	-2	-44	+49	-5	-15	+265
+1	-9	-14	+1	-35	-7	0	-14	0	-1	-8	+24	-1	-53	+27	-3	-19	+179
+2	-6	-23	+3	-29	-19	+1	-13	-1	+1	-8	-24	0	-56	0	-1	-21	+63
+3	-1	-22	+5	-17	-25	+2	-10	-7	+3	-7	-67	+1	-53	-27	+1	-21	-63
+4	+6	-6	+7	+1	-21	+3	-5	-8	+5	-5	-95	+2	-44	-49	+3	-19	-179
+5	+15	+30	-9	+25	-3	+4	+2	-6	+7	-2	-98	+3	-29	-61	+5	-15	-265
			+11	+55	+33	+5	+11	0	+9	+2	-66	+4	-8	-58	+7	-9	-301
						+6	+22	+11	+11	+7	+11	+5	+19	-35	+9	-1	-267
									+13	+13	+143	+6	+52	+13	+11	+9	-143
												+7	-91	+91	+13	+21	+91
															+15	+35	+445
110	858	4290	572	12012	5148	182	2022	572	910	728	97240	280	37128	39780	1360	5712	100776

Продолжение табл. XI

17			18			19			20		
-8	+40	-28	-17	+68	-68	-9	+51	-204	-19	+57	-969
-7	+25	-7	-15	+44	-20	-8	+34	-68	-17	+39	-357
-6	+12	+7	-13	+23	+13	-7	+19	+28	-15	+23	+85
-5	+1	+15	-11	+5	+33	-6	+6	+89	-13	+9	+377
-4	-8	+18	-9	-10	+42	-5	-5	+120	-11	-3	+539
-3	-15	+17	-7	-22	+42	-4	-14	+126	-9	-13	+591
-2	-20	+13	-5	-31	+35	-3	-21	+112	-7	-21	+553
-1	-23	+7	-3	-37	+23	-2	-26	+83	-5	-27	+445
0	-24	0	-1	-40	+8	-1	-29	+44	-3	-31	+287
+1	-23	-7	+1	-40	-8	0	-30	0	-1	-33	+99
+2	-20	-13	+3	-37	-23	+1	-29	-44	+1	-33	-99
+3	-15	-17	+5	-31	-35	+2	-26	-83	+3	-31	-287
+4	-8	-18	+7	-22	-42	+3	-21	-112	+5	-27	-445
+5	+1	-15	+9	-10	-42	+4	-14	-126	+7	-21	-553
+6	+12	-7	+11	+5	-33	+5	-5	-120	+9	-13	-591
+7	+25	+7	+13	+23	-13	+6	+6	-89	+11	-3	-539
+8	+40	+28	+15	+44	+20	+7	+19	-28	+13	+9	-377
			+17	+68	+68	+8	+34	+68	+15	+23	-85
						+9	+51	+204	+17	+39	+357
									+19	+57	+969
408	7752	3876	1938	23256	23256	570	13566	213180	2660	17556	4903140

21		
-10	+190	-285
-9	+133	-114
-8	+82	+12
-7	+37	+98
-6	-2	+149
-5	-35	+170
-4	-62	+166
-3	-83	+142
-2	-98	+103
-1	-107	+54
0	-110	0
+1	-107	-54
+2	-98	-103
+3	-83	-142
+4	-62	-166
+5	-35	-170
+6	-2	-149
+7	+37	-98
+8	+82	-12
+9	+133	+114
+10	+190	+285
770	201894	432630

22		
-21	+35	-133
-19	+25	-57
-17	+16	0
-15	+8	+40
-13	+1	+65
-11	-5	+77
-9	-10	+78
-7	-14	+70
-5	-17	+55
-3	-19	+35
-1	-20	+12
+1	-20	-12
+3	-19	-35
+5	-17	-55
+7	-14	-70
+9	-10	-78
+11	-5	-77
+13	+1	-65
+15	+8	-40
+17	+16	0
+19	+25	+57
+21	+35	+133
3542	7084	96140

23		
-11	+77	-77
-10	+56	-35
-9	+37	-3
-8	+20	+20
-7	+5	+35
-6	-8	+43
-5	-19	+45
-4	-28	+42
-3	-35	+35
-2	-40	+25
-1	-43	+13
0	-44	0
+1	-43	-13
+2	-40	-25
+3	-35	-35
+4	-28	-42
+5	-19	-45
+6	-8	-43
+7	+5	-35
+8	+20	-20
+9	+37	+3
+10	+56	+35
+11	+77	+77
1012	35420	32890

24		
-23	+253	-1771
-21	+187	-847
-19	+127	-133
-17	+73	+391
-15	+25	+745
-13	-17	+949
-11	-53	+1023
-9	-83	+987
-7	-107	+861
-5	-125	+665
-3	-137	+419
-1	-143	+143
+1	-143	-143
+3	-137	-419
+5	-125	-665
+7	-107	-861
+9	-83	-987
+11	-53	-1023
+13	-17	-949
+15	+25	-745
+17	+73	-391
+19	+127	+133
+21	+187	+847
+23	+253	+1771
4600	394680	17760600

Продолжение табл. XI

25		
-12	+92	-506
-11	+69	-253
-10	+48	-55
-9	+29	+93
-8	+12	+196
-7	-3	+259
-6	-16	+287
-5	-27	+285
-4	-36	+258
-3	-43	+211
-2	-48	+149
-1	-51	+77
0	-52	0
+1	-51	-77
+2	-48	-149
+3	-43	-211
+4	-36	-258
+5	-27	-285
+6	-16	-287
+7	-3	-259
+8	+12	-196
+9	+29	-93
+10	+48	+55
+11	+69	+253
+12	+92	+506
1300	5 3820	1480050

26		
-25	+50	-1150
-23	+38	-598
-21	+27	-161
-19	+17	+171
-17	+8	+408
-15	0	+560
-13	-7	+637
-11	-13	+649
-9	-18	+606
-7	-22	+518
-5	-25	+395
-3	-27	+247
-1	-28	+84
+1	-28	-84
+3	-27	-247
+5	-25	-395
+7	-22	-518
+9	-18	-606
+11	-13	-649
+13	-7	-637
+15	0	-560
+17	+8	-408
+19	+17	-171
+21	+27	+161
+23	+38	+598
+25	+50	+1150
5850	16380	7803900

27		
-13	+325	-130
-12	+250	-70
-11	+181	-22
-10	+118	+15
-9	+61	+42
-8	+10	+60
-7	-35	+70
-6	-74	+73
-5	-107	+70
-4	-134	+62
-3	-135	+50
-2	-170	+35
-1	-179	+18
0	-182	0
+1	-179	-18
+2	-170	-35
+3	-155	-50
+4	-134	-62
+5	-107	-70
+6	-74	-73
+7	-35	-70
-8	+10	-60
+9	+61	-42
+10	+118	-15
+11	+181	-22
+12	+250	+70
+13	+325	+130
1638	712530	101790

28		
-27	+177	-585
-25	+91	-325
-23	+67	-115
-21	+45	+49
-19	+25	+171
-17	+7	+255
-15	-9	+305
-13	-23	+325
-11	-35	+319
-9	-45	+291
-7	-53	+245
-5	-59	+185
-3	-63	+115
-1	-65	+39
+1	-65	-39
+3	-63	-115
+5	-59	-185
+7	-53	-245
+9	-45	-291
+11	-35	-319
+13	-23	-325
+15	-9	-305
+17	+7	-255
+19	+25	-171
+21	+45	-49
+23	+67	+115
+25	+91	+325
+27	+117	+585
7308	95004	2103660

29		
-14	+126	-819
-13	+99	-468
-12	+74	-182
-11	+51	+54
-10	+30	+215
-9	+11	+336
-8	-6	+412
-7	-21	+448
-6	-34	+449
-5	-45	+420
-4	-54	+366
-3	-61	+292
-2	-66	+203
-1	-69	+104
0	-70	0
+1	-69	-104
+2	-66	-203
+3	-61	-292
+4	-54	-366
+5	-45	-420
+6	-34	-449
+7	-21	-448
+8	-6	-412
+9	+11	-366
+10	+30	-215
+11	+51	-44
+12	+74	+182
+13	+99	+468
+14	+126	+819
2030	113274	4207320

30		
-29	+203	-1827
-27	+161	-1071
-25	+122	-450
-23	+86	+46
-21	+53	+427
-19	+23	+703
-17	-4	+884
-15	-28	+980
-13	-49	+1001
-11	-67	+957
-9	-82	+858
-7	-94	+714
-5	-103	+535
-3	-109	+331
-1	-112	+112
+1	-112	-112
+3	-109	-331
+5	-103	-535
+7	-94	-714
+9	-82	-858
+11	-67	-957
+13	-49	-1001
+15	-28	-980
+17	-4	-884
+19	+23	-703
+21	+53	-427
+23	+86	-46
+25	+122	+450
+27	+161	+1071
+29	+203	+1827
8990	302064	21360240

31		
-15	+145	-1015
-14	+116	-609
-13	+89	-273
-12	+64	-2
-11	+41	+209
-10	+20	+365
-9	+1	+471
-8	-16	+532
-7	-31	+553
-6	-44	+539
-5	-55	+495
-4	-64	+426
-3	-71	+337
-2	-76	+233
-1	-79	+119
0	-80	0
+1	-79	-119
+2	-76	-233
+3	-71	-337
+4	-64	-426
+5	-55	-495
+6	-44	-539
+7	-31	-553
+8	-16	-532
+9	+1	-471
+10	+20	-365
+11	+41	-209
+12	+64	-2
+13	+89	+273
+14	+116	+609
+15	+145	+1015
2480	158224	6724520

32		
-31	+155	-899
-29	+125	-551
-27	+97	-261
-25	+71	-25
-23	+47	+161
-21	+25	+301
-19	+5	+399
-17	-13	+459
-15	-29	+485
-13	-43	+481
-11	-55	+451
-9	-65	+399
-7	-73	+329
-5	-79	+245
-3	-83	+151
-1	-85	+51
+1	-85	-51
+3	-83	-151
+5	-79	-245
+7	-73	-329
+9	-65	-399
+11	-55	-451
+13	-43	-481
+15	-29	-485
+17	-13	-459
+19	+5	-399
+21	+25	-301
+23	+47	-161
+25	+71	+25
+27	+97	+261
+29	+125	+551
+31	+155	+899
10912	185504	5379616

Таблица XII

Энтропия долей $Э = -p \cdot \log_2 p = -p \dfrac{\log_{10} p}{0{,}30103}$

p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0.00	0.0000	0.0066	0.0133	0.0199	0.0266	0.0332	0.0398	0.0465	0.0531	0.0598
.01	.0664	.0710	.0757	.0803	.0850	.0896	.0942	.0989	.1035	.1082
.02	.1128	.1167	.1206	.1245	.1284	.1323	.1362	.1401	.1440	.1479
.03	.1518	.1552	.1586	.1620	.1654	.1688	.1722	.1756	.1790	.1824
.04	.1858	.1888	.1919	.1949	.1979	.1979	.2009	.2040	.2070	.2131
.05	.2161	.2190	.2216	.2243	.2271	.2298	.2325	.2353	.2380	.2408
.06	.2435	.2460	.2485	.2510	.2535	.2561	.2586	.2611	.2636	.2661
.07	.2686	.2709	.2732	.2755	.2778	.2800	.2823	.2846	.2869	.2892
.08	.2915	.2936	.2957	.2978	.2999	.3020	.3041	.3063	.3084	.3105
.09	.3126	.3146	.3165	.3185	.3204	.3224	.3244	.3264	.3283	.3302
0.10	.3322	.3340	.3358	.3376	.3394	.3413	.3431	.3449	.3467	.3485
.11	.3503	.3520	.3537	.3553	.3570	.3590	.3604	.3621	.3637	.3654
.12	.3671	.3687	.3702	.3718	.3733	.3749	.3764	.3780	.3795	.3811
.13	.3826	.3841	.3855	.3870	.3884	.3899	.3913	.3928	.3942	.3957
.14	.3971	.3984	.3998	.4011	.4025	.4038	.4051	.4065	.4078	.4092
.15	.4105	.4118	.4130	.4143	.4155	.4168	.4180	.4133	.4205	.4218
.16	.4230	.4242	.4253	.4265	.4276	.4288	.4300	.4311	.4323	.4334
.17	.4346	.4358	.4367	.4378	.4389	.4400	.4410	.4421	.4432	.4442
.18	.4453	.4463	.4473	.4483	.4493	.4503	.4512	.4522	.4532	.4542
.19	.4552	.4561	.4570	.4580	.4590	.4600	.4607	.4616	.4626	.4635
0.20	.4644	.4652	.4661	.4669	.4678	.4686	.4694	.4703	.4711	.4720
.21	.4728	.4736	.4744	.4751	.4759	.4767	.4775	.4783	.4790	.4800
.22	.4806	.4813	.4820	.4827	.4834	.4842	.4849	.4858	.4863	.4870
.23	.4877	.4883	.4890	.4890	.4896	.4903	.4909	.4915	.4922	.4937
.24	.4941	.4947	.4953	.4959	.4965	.4971	.4976	.4982	.4988	.4994
.25	.5000	.5005	.5011	.5016	.5021	.5027	.5032	.5037	.5042	.5048
.26	.5053	.5058	.5062	.5067	.5072	.5077	.5082	.5086	.5091	.5095
.27	.5100	.5104	.5108	.5113	.5117	.5121	.5125	.5129	.5134	.5138
.28	.5142	.5146	.5149	.5153	.5157	.5161	.5164	.5168	.5172	.5175
.29	.5179	.5182	.5185	.5189	.5192	.5195	.5198	.5201	.5205	.5208
0.30	.5211	.5214	.5216	.5219	.5222	.5225	.5227	.5230	.5233	.5235
.31	.5238	.5240	.5242	.5245	.5247	.5249	.5251	.5253	.5256	.5259
.32	.5260	.5262	.5264	.5265	.5267	.5269	.5271	.5273	.5274	.5276
.33	.5278	.5279	.5281	.5282	.5284	.5285	.5286	.5288	.5289	.5291
.34	.5292	.5293	.5294	.5295	.5296	.5297	.5297	.5298	.5299	.5300
.35	.5301	.5302	.5302	.5303	.5303	.5304	.5304	.5305	.5305	.5306
.36	.5306	.5306	.5306	.5306	.5306	.5307	.5307	.5307	.5307	.5307
.37	.5307	.5307	.5307	.5306	.5306	.5306	.5306	.5306	.5305	.5305
.38	.5305	.5304	.5304	.5303	.5302	.5302	.5301	.5300	.5299	.5299
.39	.5298	.5297	.5296	.5295	5294	.5293	.5292	.5291	.5290	.5289
0.40	.5288	.5287	.5285	.5284	.5282	.5281	.5280	.5278	.5277	.5275
.41	.5274	.5272	.5270	.5269	.5267	.5265	.5263	.5261	.5260	.5259
.42	.5256	.5254	.5252	.5250	.5248	.5246	.5244	.5242	.5240	.5238
.43	.5236	.5233	.5231	.5228	.5226	.5223	.5220	.5218	.5215	.5213
.44	.5210	.5208	.5205	.5202	.5200	.5197	.5194	.5192	.5189	.5187
.45	.5184	.5181	.5178	.5175	.5172	.5169	.5165	.5162	.5159	.5156
.46	.5153	.5150	.5146	.5143	.5140	.5137	.5133	.5130	.5127	.5123
.47	.5120	.5116	.5112	.5110	.5105	.5101	.5098	.5094	.5090	.5088
.48	.5083	.5079	.5075	.5071	.5067	.5063	.5059	.5055	.5051	.5047
.49	.5043	.5039	.5034	.5030	.5026	.5022	.5017	.5013	.5009	.5004
.50	.5000	.4995	.4991	.4986	.4982	.4977	.4972	.4968	.4963	.4959

p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0.51	0.4954	0.4949	0.4944	0.4940	0.4935	0.4930	0.4925	0.4920	0.4916	0.4911
.52	.4906	.4901	.4896	.4890	.4885	.4880	.4875	.4870	.4864	.4859
.53	.4854	.4849	.4843	.4838	.4832	.4827	.4822	.4816	.4811	.4805
.54	.4800	.4794	.4789	.4783	.4778	.4772	.4766	.4711	.4755	.4750
.55	.4744	.4738	.4732	.4726	.4720	.4715	.4709	.4703	.4697	.4691
.56	.4685	.4679	.4673	.4666	.4660	.4654	.4668	.4642	.4635	.4629
.57	.4623	.4617	.4610	.4604	.4597	.4591	.4584	.4578	.4571	.4565
.58	.4558	.4551	.4545	.4538	.4531	.4525	.4518	.4511	.4504	.4498
.59	.4491	.4484	.4477	.4470	.4463	.4447	.4450	.4443	.4436	.4429
0.60	.4422	.4415	.4408	.4400	.4339	.4386	.4379	.4372	.4364	.4357
.61	.4350	.4343	.4335	.4328	.4320	.4313	.4306	.4298	.4291	.4283
.62	.4276	.4268	.4261	.4253	.4245	.4338	.4230	.4222	.4214	.4207
.63	.4199	.4191	.4183	.4176	.4168	.4160	.4152	.4144	.4137	.4129
.64	.4121	.4113	.4105	.4097	.4089	.4081	.4072	.4064	.4056	.4048
.65	.4040	.4032	.4023	.4015	.4007	.3999	.3990	.3982	.3974	.3965
.66	.3957	.3948	.3940	.3931	.3923	.3914	.3905	.3897	.3888	.3880
.67	.3871	.3862	.3854	.3845	.3836	.3828	.3819	.3810	.3801	.3793
.68	.3784	.3775	.3766	.3757	.3748	.3739	.3730	.3721	.3712	.3703
.69	.3694	.3685	.3676	.3666	.3657	.3648	.3639	.3630	.3620	.3611
0.70	.3602	.3593	.3583	.3574	.3564	.3555	.3546	.3536	.3527	.3517
.71	.3508	.3498	.3489	.3479	.3470	.3470	.3450	.3441	.3431	.3422
.72	.3412	.3402	.3392	.3383	.3373	.3363	.3353	.3343	.3334	.3324
.73	.3314	.3304	.3294	.3284	.3277	.3264	.3255	.3248	.3235	.3225
.74	.3215	.3205	.3195	.3184	.3174	.3164	.3153	.3144	.3133	.3123
.75	.3113	.3103	.3092	.3082	.3071	.3061	.3051	.3040	.3030	.3019
.76	.3009	.2994	.2988	.2977	.2967	.2956	.2945	.2935	.2924	.2914
.77	.2903	.2892	.2882	.2871	.2860	.2850	.2839	.2828	.2817	.2807
.78	.2796	.2785	.2774	.2763	.2752	.2742	.2731	.2720	.2709	.2698
.79	.2687	.2676	.2665	.2653	.2642	.2631	.2620	.2609	.2597	.2585
0.80	.2575	.2564	.2552	.2541	.2530	.2519	.2507	.2496	.2485	.2473
.81	.2462	.2451	.2439	.2428	.2416	.2405	.2394	.2382	.2371	.2359
.82	.2348	.2336	.2325	.2313	.2301	.2290	.2278	.2266	.2254	.2243
.83	.2231	.2219	.2201	.2195	.2183	.2172	.2160	.2148	.2136	.2124
.84	.2112	.2100	.2088	.2076	.2064	.2052	.2040	.2028	.2016	.2004
.85	.1992	.1980	.1968	.1956	.1944	.1932	.1919	.1907	.1895	.1883
.86	.1871	.1859	.1846	.1834	.1822	.1810	.1797	.1785	.1773	.1760
.87	.1748	.1736	.1723	.1711	.1698	.1686	.1673	.1661	.1648	.1636
.88	.1623	.1610	.1598	.1585	.1572	.1560	.1547	.1534	.1521	.1509
.89	.1496	.1483	.1470	.1458	.1445	.1432	.1419	.1406	.1394	.1381
0.90	.1368	.1355	.1342	.1329	.1316	.1303	.1290	.1277	.1264	.1251
.91	.1238	.1225	.1212	.1199	.1186	.1172	.1159	.1146	.1133	.1120
.92	.1107	.1094	.1080	.1067	.1054	.1041	.1027	.1014	.1001	.0987
.93	.0974	.0961	.0947	.0934	.0920	.0907	.0893	.0880	.0866	.0852
.94	.0839	.0825	.0812	.0798	.0785	.0771	.0757	.0744	.0730	.0717
.95	.0703	.0689	.0675	.0662	.0648	.0634	.0620	.0606	.0593	.0579
.96	.0565	.0551	.0537	.0523	.0509	.0496	.0482	.0468	.0454	.0440
.97	.0426	.0412	.0398	.0384	.0370	.0356	.0342	.0328	.0314	.0300
.98	.0286	.0272	.0258	.0243	.0229	.0215	.0201	.0187	.0172	.0158
.99	.0144	.0130	.0115	.0101	.0086	.0072	.0058	.0043	.0029	.0014
1.00	.0000	—	—	—	—	—	—	—	—	—

ЛИТЕРАТУРА

Вавилов Н. И. Критический обзор современного состояния генетической теории селекции растений и животных. — «Генетика», 1965, № 1.
Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1964.
Глушков В. М. О кибернетике, как науке. — В сб.: Кибернетика, мышление, жизнь. М., «Наука», 1964.
Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1976.
Жуков-Вережников Н. Н. Теория генетической информации. М., «Мысль», 1966.
Кондаков Н. И. Логический словарь-справочник. М., «Наука», 1975.
Плохинский Н. А. Наследуемость. Новосибирск, 1964.
Плохинский Н. А. Алгоритмы биометрии. М., Изд-во МГУ, 1967.
Плохинский Н. А. Руководство по биометрии для зоотехников. М., «Колос», 1969.
Плохинский Н. А. Биометрия. Изд. 2-е. М., Изд-во МГУ, 1970.
Плохинский Н. А. Информационные показатели в биологии. — В сб.: Методы современной биометрии. М., Изд-во МГУ, 1978.
Тюхин В. С. Отражение и информация. — «Вопросы философии», 1967, № 3.
Урсул А. Д. Понятие информации в биологических исследованиях. — В сб.: Методологические вопросы биокибернетика. М., «Наука», 1974.
Фишер Р. А. Статистичеекие методы для исследователей. М., «Статистика», 1958.
Шмальгаузен И. И. Количество фенотипической информации в строении популяции и скорость естественного отбора. — В сб.: Применение математических методов в биологии. Л., Изд-во ЛГУ, 1960.
Шмальгаузен И. И. Кибернетические вопросы биологии. Новосибирск, 1968.
Эшби У. Системы информации. — «Вопросы философии», 1964, № 3.

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ III
АЛГОРИТМЫ

Алгоритм 1

Вычисление M и σ

БЕЗ СОСТАВЛЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ РЯДОВ ПРИ ОТСУТСТВИИ ДОСТАТОЧНОЙ СЧЕТНОЙ ТЕХНИКИ ДЛЯ МАЛЫХ ГРУПП

ДАТЫ МАЛОЗНАЧНЫЕ	ДАТЫ МНОГОЗНАЧНЫЕ
Каждая дата возводится в квадрат; даты и их квадраты суммируются; на основе полученных сумм ΣV и ΣV^2 рассчитываются:	По каждой дате получается условное отклонение $\Delta = V - A$, где A – любое удобное число; каждое отклонение возводится в квадрат; на основе двух сумм $\Sigma\Delta$ и $\Sigma\Delta^2$ рассчитываются:
средняя арифметическая $M = \frac{\Sigma V}{n}$,	средняя арифметическая $M = A + \frac{\Sigma\Delta}{n}$;
сумма квадратов $C = \Sigma V^2 - \frac{(\Sigma V)^2}{n}$;	сумма квадратов $C = \Sigma\Delta^2 - \frac{(\Sigma\Delta)^2}{n}$;
сигма $\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}}$	сигма $\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}}$

	V	V^2		V	Δ (V-2400)	Δ^2
1	12	144	1	2536	136	18496
2	9	81	2	2703	303	91809
3	10	100	3	2815	415	172225
4	13	169	4	2487	87	7569
5	15	225	5	2644	244	59536
6	14	196	6	2521	121	14641
7	8	64	7	2452	52	2704
8	12	144	8	2463	63	3969
	$\Sigma V = 93$	$\Sigma V^2 = 1123$		$A = 2400$	$\Sigma\Delta = 1421$	$\Sigma\Delta^2 = 370949$

$M = \frac{93}{8} = 11{,}6$	$M = 2400 + \frac{1421}{8} = 2577{,}6$
$C = 1123 - \frac{93^2}{8} = 41{,}88$	$C = 370949 - \frac{(1421)^2}{8} = 118544$
$\sigma = \sqrt{\frac{41.88}{7}} = 2{,}44$	$\sigma = \sqrt{\frac{118544}{7}} = 130{,}13$

Алгоритм 2

Вычисление M и σ без составления вариационных рядов, при наличии достаточной счётной техники (арифмометры с полным учётом числа оборотов, настольные электронные клавишные вычислительные машины)

Для больших и малых групп

	413	$\boxed{450}$	419	412	427	435	404	430	421	399	$M = \frac{\sum V}{n}$
	414	386	428	441	397	417	418	414	429	417	
	432	420	416	407	427	428	417	398	424	420	$C = \sum V^2 - \frac{(\sum V)^2}{n}$
	401	424	411	426	$\boxed{375}$	419	406	419	429	406	
	414	410	409	416	430	403	426	407	400	423	
	425	391	432	409	418	418	388	421	415	417	$\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}}$
	423	434	402	431	410	405	436	405	424	405	
	412	413	444	392	411	428	394	431	411	422	$n = 100$
	433	395	433	420	439	398	437	422	394	416	
	424	434	408	443	407	421	422	410	423	409	
$\sum V$	4191	4157	4202	4197	4146	4172	4148	4157	4170	4134	$\sum V = 41674$
$\sum V^2$	1757349	1731959	1767320	1763761	1721682	1741846	1723070	1729121	1740186	1709590	$\sum V^2 = 17385884$

Средняя арифметическая $M = \frac{41674}{100} = 416.7$

Сумма квадратов: $C = 17385884 - \frac{41674^2}{100} = 18661$

Сигма: $\sigma = \sqrt{\frac{18661}{99}} = 13.71$

Алгоритм 3

Вычисление M и σ по способу взвешенных дат при невозможности простого суммирования дат и их квадратов; при необходимости исследовать распределение признака; для признаков, выражаемых только целыми числами (плодовитость, число плодов, початков, клеток и т. д.) при небольшом размахе дат.

Все неповторяющиеся значения дат выписываются в возрастающем порядке (слева направо или снизу вверх) и в каждый класс заносятся одинаковые даты, имеющие данное значение

Без достаточной счётной техники				При наличии достаточной счётн. техн.		
V	f	fV	$fV^2 = fV \cdot V$	V	V^2	f
14	11	154	12156	14	196	11
13	69	897	11661	13	169	69
12	98	1176	14112	12	144	98
11	77	847	9317	11	121	77
10	36	360	3600	10	100	36
9	12	108	972	9	81	12
	$n = 303$	$\sum fV = 3542$	$\sum fV^2 = 41818$	$\sum fV = 3542$	$\sum fV^2 = 41818$	$n = 303$

$$M = \frac{\sum fV}{n} = \frac{3542}{303} = 11.7 \quad C = \sum fV^2 - \frac{(\sum fV)^2}{n} = 41818 - \frac{3542^2}{303} = 413$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}} = \sqrt{\frac{413}{302}} = 1.17$$

Составление вариационного ряда
Первичные данные (даты)

413	$\boxed{450}$	419	412	427	435	404	430	421	399	414	386	428	441	397	417	418	414	429	417
423	420	416	407	427	428	417	398	424	420	401	424	411	426	$\boxed{375}$	419	406	419	429	406
414	410	409	416	430	403	426	407	400	423	425	391	432	409	418	418	388	421	415	417
423	434	402	431	410	405	436	405	424	405	412	413	444	392	411	428	394	431	411	422
433	395	433	420	439	398	437	422	394	416	424	434	408	443	407	421	422	410	423	409

Число классов

$g = 1 + 3{,}3\,\lg n = 1 + 3{,}3\,\lg 100 = 7.6$

Число дат	Число классов (g)
6 - 11	4
12 - 22	5
23 - 46	6
47 - 93	7
94 - 187	8
188 - 377	9
378 - 755	10
756 - 1515	11
1515 - 3050	12

Размах

$\rho_{max-min} = 450 - 375 = 75$

$$k = \frac{\rho}{g} = \frac{75}{7.6} = 9.9 \approx 10$$

Вариационный ряд

Классы: начало W_α	Классы: средины W	Разноска	Частоты f
445-	450	·	1
435-	440	П	7
425-	430	⊠ ⊠	20
415-	420	⊠ ⊠ ⊠	30
405-	410	⊠ ⊠ ⁙	25
395-	400	⊠	10
385-	390	Г	6
375-	380	·	1
—	—	—	$n=100$

Начала классов W_α используются для разноски дат по классам. Средины классов W служат как представители классов при расчёта $\bar{x}$ по способу взвешенных вариаций.

Начало класса равно полусумме средин данного класса и следующего низшего: $W_{\alpha}(i) = \frac{W_i + W_{i-1}}{2} = \frac{450+440}{2} = 445$

Средина класса (вариация) равна полусумме начала данного класса и следующего высшего: $W_i = \frac{W_\alpha(i) + W_\alpha(i+1)}{2} = \frac{435+445}{2} = 440$

Шифр частот	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	·	··	∴	∷	⁙	Г	П	□	⊘	⊠

Вычисление M и σ по способу взвешенных вариаций; для больших групп при невозможности суммирования дат и их квадратов и при необходимости исследовать распределения признака на основе вариационного ряда при наличии достаточной счётной техники

Вариации W	W^2	Частоты f
450	202500	1
440	193600	7
430	184900	20
420	176400	30
410	168100	25
400	160000	10
390	152100	6
380	144400	1
$\Sigma fW = 41700$	$\Sigma fW^2 = 17407200$	$n = 100$

$$M = \frac{\Sigma fW}{n} = \frac{41700}{100} = 417.0$$

$$C = \Sigma fW^2 - \frac{(\Sigma fW)^2}{n} = 17407200 - \frac{41700^2}{100} = 183.00$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}} = \sqrt{\frac{18300}{99}} = 13.60$$

Вычисление M и σ

ПО СПОСОБУ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДЛЯ БОЛЬШИХ ГРУПП ПРИ НЕВОЗМОЖНОСТИ ПРОСТОГО СУММИРОВАНИЯ ДАТ И ИХ КВАДРАТОВ ; ПРИ НЕОБХОДИМОСТИ ИССЛЕДОВАТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИЗНАКА ; НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА; ПРИ ЛЮБОЙ СЧЁТНОЙ ТЕХНИКЕ

$M = A + k\frac{S_1}{n}$; $c = S_2 - \frac{S_1^2}{n}$; $\sigma = k\sqrt{\frac{c}{n-1}}$; $S_1 = \sum fa$, $S_2 = \sum fa^2$

W	f	a	fa	$fa^2 = fa\cdot a$	
					$n = 100$; $A = 380$; $k = 10$
450	1	7	7	49	$S_1 = \sum fa = 370$
440	7	6	42	252	$S_2 = \sum fa^2 = 1552$
430	20	5	100	500	
420	30	4	120	480	$M = 380 + 10\frac{370}{100} \doteq 417{,}0$
410	25	3	75	225	
400	10	2	20	40	$c = 1552 - \frac{370^2}{100} = 183$
390	6	1	6	6	
380	1	0	0	0	$[C = 10^2\cdot 183 = 18300]$
	n=100		$S_1 = 370$	$S_2 = 1552$	$\sigma = 10\sqrt{\frac{183}{99}} = 13{,}60$

A - УСЛОВНАЯ СРЕДНЯЯ: СЕРЕДИНА НАИМЕНЬШЕГО КЛАССА ($A = 380$)

k - ВЕЛИЧИНА КЛАССОВОГО ПРОМЕЖУТКА ($k = 10$)

$a = \frac{W_i - A}{k}$ - УСЛОВНЫЕ ОТКЛОНЕНИЯ СЕРЕДИН КЛАССОВ (ВАРИАЦИЙ), ВЫРАЖЕННЫЕ В КЛАССОВЫХ ПРОМЕЖУТКАХ. Для $W = A$, $a = 0$, ДЛЯ ОСТАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ $a = +1 +2 +3$ И Т.Д.

S_1, S_2 - ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ СУММЫ, РАВНЫЕ $\sum fa$ и $\sum fa^2$ (370 и 1552)

$c = \frac{C}{k^2} = \frac{1}{k^2}\sum f(W_i - M)^2 = S_2 - \frac{S_1^2}{n}$ - СУММА ВЗВЕШЕННЫХ КВАДРАТОВ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ СРЕДИН КЛАССОВ ОТ СРЕДНЕЙ РЯДА, ВЫРАЖЕННЫХ В КВАДРАТАХ КЛАССОВОГО ПРОМЕЖУТКА

C - СУММА КВАДРАТОВ $= k^2 c$

ПОГРЕШНОСТИ ПРИ РАСЧЁТЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО РЯДА ДЛЯ ДАННОГО ПРИМЕРА РАВНЫ: $\Delta_M = 417{,}0 - 416{,}7 = +0{,}3$; $\Delta_\sigma = 13.60 - 13.73 = -0{,}13$

Вычисление M и σ по способу сумм для больших групп на основе вариационного ряда при слабой счётной технике

W	f	p_1	p_2	ПРОВЕРКА: $99 + 1 = 100$; $99 + 271 = 370$
450	1	1	1	$n = 100$; $A = 380$; $k = 10$
440	7	8	9	$S_1 = p_1 = 370$
430	20	28	37	$S_2 = p_1 + 2p_2 = 370 + 2\cdot 591 = 1552$
420	30	58	95	
410	25	83	178	$M = A + k\frac{S_1}{n} = 380 + 10\frac{370}{100} = 417.0$
400	10	93	271	
390	6	99	–	$c = S_2 - \frac{S_1^2}{n} = 1552 - \frac{370^2}{100} = 183$
380	1	–	–	
$\sum$	n = 100	$P_1 = \sum p_1 = 370$	$P_2 = \sum p_2 = 591$	$\sigma = k\sqrt{\frac{c}{n-1}} = 10\sqrt{\frac{183}{99}} = 13.60$

p_1 - НАКОПЛЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ПЕРВОГО РЯДА СУММИРОВАНИЯ (1, 8, 28 и т.д.)

p_2 - НАКОПЛЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ВТОРОГО РЯДА СУММИРОВАНИЯ (1, 9, 37 и т.д.)

ТРИ ОГРАНИЧИТЕЛЬНЫЕ ЧЕРТОЧКИ ВСЕГДА СТАВЯТСЯ ПРОТИВ ПОСЛЕДНЕГО, НАИМЕНЬШЕГО КЛАССА

НАКОПЛЕНИЕ ЧАСТОТ ВСЕГДА ВЕДЁТСЯ ОТ ВЫСШИХ КЛАССОВ К НИЗШИМ
$p_1 = 1 + 7 = 8$; $8 + 20 = 28$ и т.д. ; $p_2 = 1 + 8 = 9$; $9 + 28 = 37$ и т.д.

Выравнивание эмпирических вариационных кривых по нормальному закону $p' = \frac{n \cdot k}{\sigma} \cdot f(x)$

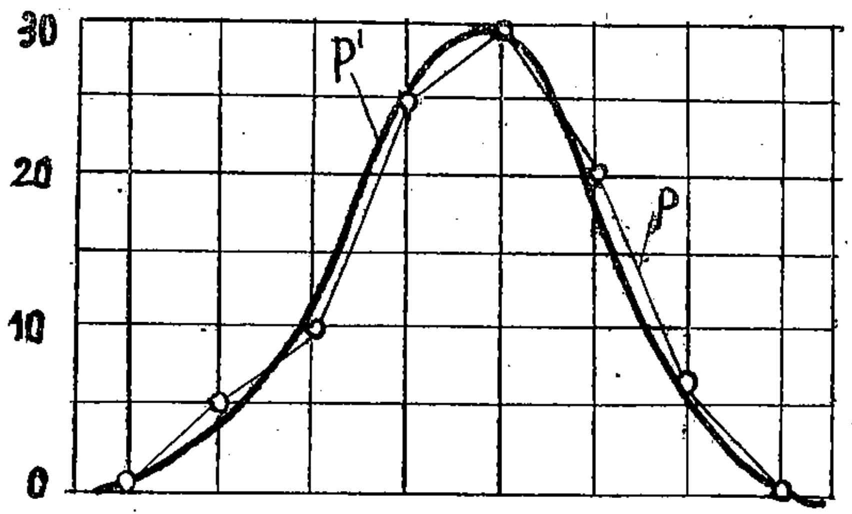
p' - теоретическая частота
n - объём ряда
k - классовый промежуток
σ - сигма

$f(x)$ - первая функция нормированного отклонения, находится по таблицам ординат нормальной кривой (табл. V)
$x = \frac{W-M}{\sigma}$ - нормированное отклонение средин классов

Вариации W	Эмпирические частоты p	W-M	$x=\frac{W-M}{\sigma}$	f(x) (табл. V)	Теоретические частоты $\frac{n \cdot k}{\sigma} f(x)$	p'
450	1	+33	2,43	0,021	1,5	1
440	7	+23	1.69	0.096	7.0	7
430	20	+13	0.96	0.252	18,4	18
420	30	+3	0.22	0.389	28,5	29
410	25	-7	0.51	0.350	25,6	26
400	10	-17	1.25	0.183	13,5	14
390	6	-27	1,99	0,055	4,0	4
380	1	-37	2,72	0.010	0,7	1
	100	–	–	–	99.2	100

Пример:

$n = 100$
$k = 10$
$M = 417,0$
$\sigma = 13,7$
$\frac{n \cdot k}{\sigma} = \frac{100 \cdot 10}{13,7} = 73,0$



Вариации	380	390	409	410	420	430	440	450
Эмпирические частоты p	1	6	10	25	30	20	7	1
Теоретические частоты p'	1	4	14	26	29	18	7	1

Выравнивание асимметричных (А) и эксцессивных (Е) кривых распределения по способу Шарлье

$p'(A) = p(H) \cdot \left[1 + \frac{A}{6}(x^3 - 3x)\right]$ | $p'H = \frac{n \cdot k}{6} \cdot f(x)$ | $x = \frac{V-M}{\sigma}$

$$p'(\varepsilon) = p'(H) \cdot \left[1 + \frac{A}{6}(x^3-3x) + \frac{\varepsilon}{24}(x^4 - 6x^2 + 3)\right]$$

V	$\bar{p}$	D V-M	X D/σ	f(x) 0,	$p'(H)$ $\frac{n \cdot k}{\sigma} f(x)$	a $1+\frac{A}{6}(x^3-3x)$	$p'(A)$ $p'(H) \cdot a$	в $\frac{\varepsilon}{24}(x^4-6x^2+3)$	$p'(\varepsilon)$ $p'(H)(a+в)$
10	1	6,65	4,00	00013	0,04	8.54	0,3	+6,4	0,6
9	3	5,65	3,40	0012	0,31	5,22	1,6	+2,6	2,4
8	5	4.65	2,80	008	2,02	2.97	6,0	+0,68	7.4
7	11	3.65	2,20	035	8,84	1.59	14,1	-0,102	13,2
6	24	2.65	1.60	111	28,02	0,90	25,2	-0,226	18,9
5	45	1.65	0,99	244	61.60	0,71	44.0	-0,078	39,3
4	76	0,65	0,39	371	93.91	0,84	78,3	+0,082	86.1
3	117	-0,35	-0,21	390	98,96	1.09	105,3	+0,107	118,0
2	92	-1.35	-0.82	285	72,46	1.28	92,1	-0,023	90.1
1	45	-2,35	-1.42	146	36,86	1.20	44.2	-0,196	37,0
0	1	-3,35	-2,02	052	13,13	0,68	8,9	-0.188	6,5
n = 420		-4.35 -5,35	-2,62 -3,22	013 0022	3,29 0.56	Σ(p'A) = 420		Σ(p'ε) = 420	

$n = 420$; $\Sigma pV = 1407$ | $M = \frac{1407}{420} = 3,35$ | $\Sigma pD^2 = 1160$; $\sigma = \sqrt{\frac{1160}{419}} = 1,6639$

$\Sigma pD^3 = 1689$ | $\sigma^3 = 4,6067$ | $A = \frac{1689}{420 \cdot 4,6067} = 0.87$ | $\frac{A}{6} = 0.145$

$\Sigma pD^4 = 12636$ | $\sigma^4 = 7,6651$ | $\varepsilon = \frac{12636}{420 \cdot 7,6651} - 3 = 0.93$ | $\frac{\varepsilon}{24} = 0,039$

$m_a = \sqrt{\frac{6}{420}} = 0.120$ | $m_\varepsilon = \sqrt{\frac{24}{420}} = 0.240$ | $\frac{n \cdot k}{\sigma} = \frac{420 \cdot 1}{1.6639} = 252,4$

Оценка различий между эмпирическим распределением и теоретическим. Критерий χ^2 („хи-квадрат")

$$\chi^2 = \sum \frac{(f-f')^2}{f'} \geq \chi^2_{st} \quad \begin{cases} \beta_3 \geq 0{,}999 & \text{при малой} \\ \beta_2 \geq 0{,}99 & \text{приобычной} \\ \beta_1 \geq 0{,}95 & \text{при большой} \end{cases} \text{ ответственности исследований}$$

$\nu_2 = g_2 - 3$ – число степеней свободы

Различия могут считаться пренебрежимыми, если эмпирический критерий не достигает требуемого порога вероятности

f, f' – эмпирические и теоретические частоты классов

χ^2_{st} – стандартные значения критерия (табл. VIII)

ν_1, ν_2 – первичное и вторичное число степеней свободы $\nu_1 = g_1 - 3$, $\nu_2 = g_2 - 3$ при нормальном распределении

g_1, g_2 – число классов в распределении до и после редукции классов с малыми теоретическими частотами

f_{min} – минимально допустимая теоретическая частота крайних классов в зависимости от начального числа степеней свободы

ν_1	1	2	3÷6	>6
f'_{min}	4	2	1	0,5

Крайние классы с теоретической частотой $f' < f'_{min}$ объединяются с соседними классами

W	f	f' алгоритм 8	f-f'	$(f-f')^2$	$\frac{(f-f')^2}{f'}$
450	1	1.5	0,5	0,25	0,167
440	7	7.1	0,1	0,01	0,001
430	20	18,5	1,5	2,25	0,122
420	30	28,6	1,4	1,96	0,069
410	25	25,7	0,7	0,49	0,019
400	10	13,5	3,5	12,25	0,907
390	6 } 7	4,0 } 4,7	2,3	5,29	1,126
380	1	0,7			
Σ	100	99,6	–	–	2,411

$g_1 = 8$; $\nu = 8 - 3 = 5$

$f'_{min} = 1$

$g_2 = 7$; $\nu_2 = 7 - 3 = 4$

$\chi^2_{st} = \{9{,}5 - 13{,}3 - 18{,}5\}$

$\chi^2 = 2{,}41 < 9{,}5$

Различие рядов недостоверно, эмпирическое распределение можно считать нормальным, точнее, случайной формой проявления закономерностей нормального распределения (если теоретическое распределение строилось по нормальному закону)

Определение достоверности различия двух эмпирических распределений с одинаковой системой классов, с одинаковыми и неодинаковыми границами.

Обозначения: $n_1\ n_2\ N$ – объёмы (Σf) каждого распределения и их суммы ($N = n_1 + n_2$),

f_1 – частоты одного из распределений (любого),

f_2 – частоты другого распределения,

S – суммы частот по каждому классу ($S = f_1 + f_2$),

ν – число степеней свободы ($\nu = g - 1$),

g – общее число классов

I. Распределение с одинаковыми объёмами

$$\chi^2 = \left\{4 \sum \frac{f_1^2}{S} - N\right\} \geq \chi^2_{st}$$

(табл. VIII)

$\nu = g - 1$

W	f_1	f_2	f_1^2	S $f_1 + f_2$	f_1^2/S
6	–	1	1	1	–
5	4	6	16	10	1,60
4	8	9	64	17	3,77
3	8	6	64	14	4,57
2	11	7	121	18	6,72
1	1	3	1	4	0,25
Σ	32	32		(64)	16,91

$\chi^2 = 4 \cdot 16{,}91 - 64 = 3{,}6$

$\nu = 6 - 1 = 5$

$\chi^2_{st} = \{11{,}1 - 15{,}1 - 20{,}5\}$

II. Распределение с неодинаковыми объёмами

$$\chi^2 = \frac{N^2}{n_1 \cdot n_2} \left\{\sum \frac{f_1^2}{S} - \frac{n_1^2}{N}\right\} \geq \chi^2_{st}$$

(табл. VIII)

$\nu = g - 1$

W	f_1	f_2	f_1^2	S $f_1 + f_2$	f_1^2/S
9	–	3	–	3	–
8	1	6	1	7	0,14
7	7	4	49	11	4,46
6	10	18	100	28	3,57
5	8	20	64	28	2,29
4	5	2	25	7	3,57
3	1	6	1	7	0,14
2	–	2	–	2	–
1	–	3	–	3	–
Σ	32	64		(96)	14,17

$\chi^2 = \frac{96^2}{32 \cdot 64} \left\{14{,}47 - \frac{32^2}{96}\right\} = 15{,}8$

$\nu = 9 - 1 = 8$

$\chi^2_{st} = \{15{,}5 - 20{,}1 - 26{,}1\}$

Определение доверительных границ генеральных параметров $\bar{M}$ и P

Генеральная средняя

$$\bar{M} = \tilde{M} \pm \Delta \; ; \; \Delta = t m \; ; \; m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$n = 100$, $\tilde{M} = 200$, $\tilde{\sigma} = 20$, $m = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2{,}0$

$\beta = 0{,}95$; $\nu = n - 1 = 99$; $t_{st} = 2{,}0 - 2{,}6 - 3{,}4$ (табл. VII)

$\Delta = 2{,}0 \cdot 2{,}0 = 4$

$\bar{M} = 20 \pm 4$ < не более 204; не менее 196

204 – возможный максимум значения генеральной средней;

196 – гарантированный минимум значения генеральной средней

Генеральная доля

$$\mathrm{P} = p \pm \Delta \; ; \; \Delta = t m \; ; \; m = \sqrt{\frac{P(1-p)}{n-1}}$$

$n = 100$; $P = 0{,}60$; $m = \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{99}} = 0{,}05$

$\beta = 0{,}95$; $\nu = n - 1 = 99$; $t_{st} = \{2{,}0 - 2{,}6 - 3{,}4\}$ (табл. VII)

$\Delta = 2{,}0 \cdot 0{,}05 = 0{,}10$

$\mathrm{P} = 0{,}60 \pm 0{,}10$ < не более 0,70; не менее 0,50

0,70 – возможный максимум генеральной доли,

0,50 – гарантированный минимум генеральной доли

Оценка разности выборочных средних

Достоверность разности:

- возможность обобщения результатов выборочного исследования,
- достаточная вероятность различия генеральных средних, такого, какое получено в выборочном исследовании,
- достаточная вероятность действия изучаемого фактора при его массовом применении, такого действия, какое обнаружено в эксперименте

Недостоверность разности:

- невозможность любого прогноза величины различия и знака разности между соответствующими генеральными совокупностями

Достаточная вероятность безошибочного или ошибочного прогноза генеральной разности определяется по следующей схеме:

Ответственность исследования двух выборочных средних	Пороги вероятности	Вероятность прогнозов	
		безошибочных	ошибочных
обычная	I	$\beta_1 \geqslant 0{,}95$	$\alpha_1 \leqslant 0{,}05$
повышенная	II	$\beta_2 \geqslant 0{,}99$	$\alpha_2 \leqslant 0{,}01$
высокая	III	$\beta_3 \geqslant 0{,}999$	$\alpha_3 \leqslant 0{,}001$

Определение статистической достоверности разности не имеет никакого отношения к оценке организационной правильности проведения эксперимента и точности получения первичных данных

Алгоритм 14

Критерий достоверности разности (Критерий Стьюдента)

$$t_d = \frac{|d|}{m_d} = \frac{M_2 - M_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \geqslant t_{st} \begin{Bmatrix} \beta_1 = 0{,}95 \\ \beta_2 = 0{,}99 \\ \beta_3 = 0{,}999 \end{Bmatrix} (\nu_d = n_1 + n_2 - 2)$$

M_1, M_2 – сравниваемые средние

$m_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1}$; $m_2^2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ – квадраты ошибок репрезентативности

$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{C}{n(n-1)}$; $C = \Sigma(V - M)^2 = \Sigma V^2 - \frac{(\Sigma V)^2}{n}$

n_1, n_2 – объёмы выборок

t_{st} – стандартные значения критерия Стьюдента определяются по таблице критериев Стьюдента по числу степеней свободы ($\nu = n_1 + n_2 - 2$) для одного из трёх порогов вероятности

при $t_d \geqslant t_{st}$ – разность достоверна, подчёркивается одной, двумя или тремя чертами

при $t_d < t_{st}$ – разность недостоверна, подчёркивается волнистой чертой

Если $\widetilde{M}_2 > \widetilde{M}_1$ и $t_d \geqslant t_{st}$, то и $\bar{M}_2 > \bar{M}_1$
Если $\widetilde{M}_2 > \widetilde{M}_1$ а $t_d < t_{st}$, то $\bar{M}_2 \geqq \bar{M}_1$

Пример:

$n_1 = 25$; $M_1 = 232$; $\sigma_1 = 23$
$n_2 = 36$; $M_2 = 210$; $\sigma_2 = 21$

$m_1^2 = \frac{23^2}{25} = 21{,}16$
$m_2^2 = \frac{21^2}{36} = 12{,}25$
$+$
$m_d^2 = 33{,}41$
$m_d = 5{,}78$

$|d| = 210 - 232 = |22|$

$t_d = \frac{22}{5{,}78} = \underline{\underline{\underline{3{,}8}}}$

$\nu_d = 25 + 36 - 2 = 59$; $t_{st} = \{2{,}0 - 2{,}7 - 3{,}5\}$ (табл. VII)

Алгоритм 15

Критерий Фишера

$$F_d = \frac{d^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \geqslant F_{st} \begin{Bmatrix} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = n_1 + n_2 - 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 = 0{,}95 \\ \beta_2 = 0{,}99 \\ \beta_3 = 0{,}999 \end{Bmatrix}$$

d^2 – квадрат разности средних $(M_2 - M_1)^2$

$\sigma_z^2 = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{C_1 + C_2}{n_1 + n_2 - 2}$ = варианса случайного разнообразия

n_1, n_2 – объёмы выборок

F_{st} – стандартные значения критерия Фишера находятся по специальной таблице на основе двух чисел свободы ($\nu_1 = 1$; $\nu_2 = n_1 + n_2 - 2$) для одного из трёх порогов вероятности (табл. VI)

При $F_d \geqslant F_{st}$ – разность достоверна;

при $F_d < F_{st}$ – разность недостоверна.

Употребляется критерий Фишера в тех случаях, когда нет противопоказаний к тому, чтобы считать разнообразие обеих выборок достаточно близким

Пример:

$n_1 = 25$; $M_1 = 232$; $\sigma_1 = 23$
$n_2 = 36$; $M_2 = 210$; $\sigma_2 = 21$

$d = 22$; $d^2 = 484$
$\sigma_z^2 = \frac{24 \cdot 23^2 + 35 \cdot 21^2}{25 + 36 - 2} = 476{,}8$

$\nu_1 = 1$; $\nu_2 = 25 + 36 - 2 = 59$

$F_{st} = \frac{484}{476{,}8} \cdot \frac{25 \cdot 36}{25 + 36} = \underline{\underline{\underline{14{,}9}}}$

$F_{st} = \{4{,}0 - 7{,}1 - 12{,}0\}$ (табл. VI)

Критерий Бейли

$$t_d = \frac{M_2 - M_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \geqslant t_{st}\left\{ \nu_d = \frac{\nu_1 \cdot \nu_2}{\nu_2 a_1 + \nu_1 a_2} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 0{,}95 \\ \beta_2 = 0{,}99 \\ \beta_3 = 0{,}999 \end{array} \right\}$$

$t_d = \dfrac{d}{m_d}$; $\left.\begin{array}{l} \nu_1 = n_1 - 1 \\ \nu_2 = n_2 - 1 \end{array}\right\}$ ТАК ЖЕ, КАК В КРИТЕРИИ Стьюдента

Число степеней свободы для разности определяется по Бейли особым способом, включая в формулу ν_d две новые величины:

$$a_1 = \left(\frac{m_1^2}{m_d^2}\right)^2 \quad \text{и} \quad a_2 = \left(\frac{m_2^2}{m_d^2}\right)^2 ; \quad \left(m^2 = \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Пример:

$n_1 = 25$ $M_1 = 232$ $\sigma_1 = 23$ $m_1^2 = \dfrac{23^2}{25} = 21{,}16$

$n_2 = 36$ $M_2 = 210$ $\sigma_2 = 21$ $m_2^2 = \dfrac{21^2}{36} = 12{,}25$

$a_1 = \left(\dfrac{21{,}16}{33{,}41}\right)^2 = 0{,}40$ $\nu_1 = 24$ $m_d^2 = (+) = 33{,}41$

$a_2 = \left(\dfrac{12{,}25}{33{,}41}\right)^2 = 0{,}13$ $\nu_2 = 35$ $m_d = (\sqrt{\ }) \ 5{,}78$

$$\nu_d = \frac{24 \cdot 35}{35 \cdot 0{,}40 + 24 \cdot 0{,}13} = 49{,}1 \longrightarrow t_{st} = \{2{,}0 - 2{,}7 - 3{,}5\}$$

(ТАБЛ. VII)

$$t_d = \frac{22{,}00}{5{,}78} = \underline{\underline{3{,}8}}$$

Критерий Бейли можно применять при исследовании малых выборок при полной неизвестности структуры генеральных совокупностей

Оценка разности выборочных долей; критерий Стьюдента

$$t_d = \frac{d}{m_d} = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \geqslant t_{st}\{\nu_d = n_1 + n_2 - 2\}$$

$\beta_1 = 0{,}95$; $\beta_2 = 0{,}99$; $\beta_3 = 0{,}999$

p_1, p_2 – сравниваемые доли

$p = \dfrac{A}{n}$ $\left\{\begin{array}{l} n \text{ – объём группы} \\ A \text{ – число объектов с признаком} \end{array}\right.$

m_1^2, m_2^2 – квадраты ошибок долей

$m = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}}$ $\boxed{m^2 = \dfrac{p(1-p)}{n-1}}$

t_{st} – стандартные значения критерия Стьюдента (табл. VII) для числа степеней свободы $\nu_d = n_1 + n_2 - 2$ и трех порогов вероятности безошибочных прогнозов: 0,95; 0,99; 0,999.

Пример:

$n_1 = 100$; $A = 40$; $p_1 = \dfrac{40}{100} = 0{,}4$; $m_1^2 = \dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{99} = 0{,}0024$ +

$n_2 = 200$ $A = 100$; $p_2 = \dfrac{100}{200} = 0{,}5$; $m_2^2 = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{199} = 0{,}0013$

$d = 0{,}1$; $m_d = 0{,}061$ $m_d^2 = 0{,}0037$

$t_d = \dfrac{0{,}100}{0{,}061} = 1{,}6$ $m_d = 0{,}061$

$\nu_d = 100 + 200 - 2 = 298$ $t_{st} = \{2{,}0 - 2{,}6 - 3{,}3\}$

Разность недостоверна. Осталось неизвестным, различаются или не различаются доли в генеральных совокупностях. Нельзя считать, что различия между ними нет. Требуется повторить исследование на выборках большего объёма. Если и при этом получится недостоверная разность, можно считать, доли в генеральных совокупностях не различаются или различаются очень незначительно. Это значит, что исследуемый фактор действует столь слабо (или вовсе не действует), что его невозможно рекомендовать для массового применения

Критерий „ФИ"

$$F_\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \cdot \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \geqslant F_{st} \begin{cases} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = n_1 + n_2 - 2 \end{cases}$$

φ - угол „ФИ" в радианах, функция доли, определяемая по Фишеру:

$$\varphi^R = \frac{2\pi}{180} \arcsin\sqrt{p} = 0{,}0349066 \cdot \arcsin\sqrt{p}$$

Значения углов „ФИ" находят по специальной таблице (см. табл. $\overline{X}$)

n_1, n_2 - объёмы выборок

$n_1 = 5000$; $A_1 = 4$; $p_1 = \frac{4}{5000} = 0{,}0008$; $\varphi_1 = 0.0566$

$n_2 = 500$; $A_2 = 4$; $p_2 = \frac{4}{500} = 0{,}0080$; $\varphi_2 = 0{,}1791$

$F_\varphi = 0{,}015 \cdot \frac{2500000}{5500} = \underline{\underline{6{,}8}}$ $\qquad d = |0{,}1225|$

$\qquad d^2 = 0{,}015$

$\nu_1 = 1$; $\nu_2 = \infty$

$F_{st} = \{3{,}8 - 6{,}6 - 10{,}8\}$ (табл. $\overline{VI}$)

Разность достоверна по второму порогу вероятности безошибочных прогнозов. С вероятностью не менее 0,99 можно прогнозировать большое содержание плюсовых объектов во второй генеральной совокупности. Если исследовалось действие нового мутагена (2-я выборка), то вполне обоснована рекомендация этого препарата для массового применения в тех случаях, когда требуется повышенное производство исследованной мутации.

Оценка разности между выборочной и генеральной долями

1. Проверка гипотезы о принадлежности изучаемой выборки (p) к определённой генеральной совокупности (P).
2. Проверка гипотезы о величине генеральной доли (P) по результатам выборочного исследования (p).

$$t_{(p-P)} = \frac{d}{m_d} \geqslant t_{st}\ (\nu = n - 1) \quad (\text{табл. } \overline{VII})$$

p, P - выборочная и генеральная доли

$d = p - P$ - разность между выборочной и генеральной долями

$m_d = m_p = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$ — ошибка разности между выборочной и генеральной долями, равная ошибке выборочной доли, определяемой на основе известных или предполагаемых генеральных долей P и $Q = 1 - P$.

n - объём выборки

Пример 1. Впервые исследованная группа объёмом $n = 50$ содержала 35 плюсовых объектов (имеющих изучаемый признак), $p = 0{,}70$. Проверяется гипотеза о принадлежности этой группы к генеральной совокупности, в которой таких объектов обычно содержится 50%, $P = 0{,}50$

$$t_{p-P} = \frac{0{,}7 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{50}}} = \frac{0{,}20}{0{,}07} = \underline{\underline{2{,}9}}\ ; \ \nu = 50 - 1 = 49 ; \ t_{st} = \{2{,}0 - 2{,}7 - 3{,}5\}$$

Вывод: Разность достоверна с вероятностью $\beta > 0{,}99$; ответ отрицателен: изученная группа не может принадлежать к этой генеральной совокупности.

Пример 2. Предложена гипотеза: в генеральной совокупности плюсовых объектов должно содержаться 75%, $P = 0{,}75$. Проверка по выборке, в которой при $n = 100$ плюсовых объектов оказалось 70 ($p = 0{,}70$), показала:

$$t_{p-P} = \frac{0{,}75 - 0{,}70}{\sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{100}}} = \underline{1{,}2}\ ; \ \nu = 99 ; \ t_{st} = \{2{,}0 - 2{,}6 - 3{,}4\} \ (\text{табл. } \overline{VII})$$

Вывод: Разность явно недостоверна. Ответ положителен: гипотеза не опровергнута и может считаться правильной до тех пор, пока не будет опровергнута или заменена более точной гипотезой

Для t_{p-P} пороги вероятности:

$\beta_1 \geqslant 0{,}95$ при большой (!)
$\beta_2 \geqslant 0{,}99$ при обычной
β_3 $0{,}999$ при малой (!)
} ответственности

Вычисление коэффициента корреляции для малочисленных групп

Первый способ

$$r=\frac{\sum V_1V_2-\frac{\sum V_1\sum V_2}{n}}{\sqrt{C_1C_2}};\ (n\geq n_{st})$$

V_1V_2 – даты признаков

C_1C_2 – сумма квадратов

$$C=\sum V^2-\frac{(\sum V)^2}{n}$$

n – число сравниваемых пар

Второй способ

$$r=\frac{C_1+C_2-Cd}{2\sqrt{C_1C_2}};\ (n\geq n_{st})$$

C_1C_2Cd – сумма квадратов по первому и второму признакам и по ряду разностей $d=V_1-V_2$

$$C=\sum V^2-\frac{(\sum V)^2}{n}\ \text{ и }\ Cd=\sum d^2-\frac{(\sum d)^2}{n}$$

n – число сравниваемых пар

V_1	V_2	V_1^2	V_2^2	V_1V_2	V_1	V_2	V_1^2	V_2^2	$d=V_1-V_2$	d^2
3	11	9	121	33	31	27	961	729	+4	16
7	10	49	100	70	22	24	484	576	−2	4
1	7	1	49	7	27	32	728	1024	−5	25
11	4	121	16	44	29	29	841	841	0	0
9	3	81	9	27	21	24	441	576	−3	9
5	9	25	81	45	30	27	900	729	+3	9
2	7	4	49	14	23	23	529	529	0	0
10	4	100	16	40	28	31	784	961	−3	9
4	12	16	144	48	25	30	625	900	−5	25
8	3	64	9	24	24	23	576	529	+1	1
60	70	470	594	352	260	270	6870	7394	−10	98

$$C_1=470-\frac{60^2}{10}=110$$

$$C_2=594-\frac{70^2}{10}=104$$

$$r=\frac{352-\frac{60\cdot 70}{10}}{\sqrt{110\cdot 104}}=\frac{-68}{107}=-0{,}64$$

$n=10;\ n_{st}=\{10-15-23\}$ (табл. IX)

Вывод: отрицательная корреляция в генеральной совокупности достоверна с вероятностью первого порога $\beta>0{,}95$

$$C_1=6870-\frac{260^2}{10}=110$$

$$C_2=7394-\frac{270^2}{10}=104$$

$$Cd=98-\frac{10^2}{10}=88$$

$$r=\frac{110+104-88}{2\sqrt{110\cdot 104}}=\frac{+126}{214}=+0{,}59$$

$n=10;\ n_{st}=\{11-18-27\}$ (табл. IX)

Вывод: положительная корреляция в генеральной совокупности на грани достоверности первого порога. В исследованиях пониженной ответственности такую корреляцию можно считать достоверной. В ответственных работах следует повторить оценку корреляции на более обширном материале.

Составление корреляционной решётки для последующего измерения корреляционных связей первого признака (1) со вторым (2)

Первичные измерения

V_1	107	169	121	168	167	124	138	145	130	98
V_2	60	93	54	90	86	57	64	71	47	43
1	133	50	163	87	135	111	$\boxed{186}$	72	140	132
2	57	37	81	50	61	37	101	44	67	55
1	117	165	147	153	149	179	172	142	151	113
2	50	84	73	70	74	$\boxed{104}$	87	69	65	42
1	134	155	93	161	159	80	139	173	137	177
2	59	73	37	80	77	35	66	90	63	95
1	102	136	157	165	127	131	152	115	175	104
2	48	62	75	97	63	53	67	48	93	53

$n=50$, g – число классов $=1+3{,}3\cdot\log 50=7$

$lim_1=50\div 186\ (138)$ $\quad k_1=138/7\approx 20$

$lim_2=35\div 104\ (69)$ $\quad k_2=69/7\approx 10$

Разноска корреляционной решётки (достаточно обозначить только начала классов)

2 \ W_d \ 1	50 -	70 -	90 -	110 -	130 -	150 -	170 -	n_2
95 -							4	4
85 -						3	3	6
75 -						5		5
65 -					6	4		10
55 -			1	2	7			10
45 -		1	2	3	2			8
35 -	1	2	2	2				7
n_1	1	3	5	7	15	12	7	N = 50

Вычисление коэффициэнта корреляции по способу произведений для больших групп по корреляционной решётке

$$r = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_1 \cdot C_2}} \qquad N \geq \hat{n}$$

2 \ 1	60	80	100	120	140	160	180	n_2	a_2
100							4	4	6
90						3	3	6	5
80						5		5	4
70					6	4		10	3
60			1	2	7			10	2
50		1	2	3	2			8	1
40	1	2	2	2				7	0
n_1	1	3	5	7	15	12	7	50	
a_1	0	1	2	3	4	5	6		
Σfa_2	0	1	4	7	34	47	39	= 132	

N = 50	1	2
$S_1 = \Sigma na$	196	132
$S_2 = \Sigma na^2$	878	512
$C = S_2 - S_1^2/N$	$878 - \frac{196^2}{50} = 109{,}7$	$512 - \frac{132^2}{50} = 163{,}5$

$S_{1,2} = \Sigma a_1(\Sigma fa_2)$	635
$C_{1,2} = S_{1,2} - \frac{S_1(1)\cdot S_1(2)}{N} = 635 - \frac{196\cdot 132}{50} =$	+117,6
$\sqrt{C_1 C_2} = \sqrt{109{,}7\cdot 163{,}5} =$	134,0

$$r = \frac{117.6}{134.0} = +0.88$$

$N = 50 \qquad \hat{n} = \{5 - 7 - 9\}$ (табл. IX)

Полный корреляционный анализ

Y \ X		60	80	100	120	140	n_Y	a_Y
	90			2	1		3	5
	80		3	6	3		12	4
	70		4	3	5	2	14	3
	60	2	2	1	2	4	11	2
k = 10	50	4	1			2	7	1
A =	40	3					3	0
n_X		9	10	12	11	8	N = 50	
a_X		0	1	2	3	4	–	
Σfa_Y		8	29	45	36	16	= 134	
$H = \frac{(\Sigma fa_Y)^2}{n}$		7,1	84,1	168,8	117,8	32,0	$\Sigma H = 410$	
$M = A + k\frac{\Sigma fa_Y}{n}$		49	69	78	73	60		

g = 5	X	Y
N	50	50
$S_1 = \Sigma na$	99	134
$S_2 = \Sigma na^2$	285	444
$C = S_2 - S_1^2/N$	89	85

$S_{XY} = \Sigma(a_X \cdot \Sigma fa_Y) = 291$

$C_{XY} = S_{XY} - \frac{S_1(x) S_1(y)}{N} = 26$

$C^2_{XY} = 676$

$N = 50;\ g = 5;\ k = 10$

$H_\Sigma = \frac{[S_1(y)]^2}{N} = \frac{134^2}{50} = 359$

$$\Sigma = \Sigma H - H_\Sigma = 410 - 359 = 51$$

Показатель прямолинейной связи (квадрат коэффициента корреляции)

$$r^2 = \frac{C^2_{XY}}{C_X C_Y} = \frac{676}{89\cdot 85} = 0{,}09 \qquad F_{r^2} = \frac{r^2}{1-r^2}\cdot\frac{N-g}{g-1} = \frac{0{,}09}{0{,}91}\cdot\frac{45}{4} = 1{,}1$$

$(r = 0{,}30) \qquad \nu_1 = g - 1 = 4;\ \nu_2 = N - g = 45;\ F_{st} = \{2{,}6 - 3{,}8 - 5{,}6\}$

Показатель криволинейной связи (квадрат корреляционного отношения)

$$\eta^2 = \Sigma / C_Y = 51/85 = 0{,}60 \qquad F_\eta = \frac{\eta^2}{1-\eta^2}\cdot\frac{N-g}{g-1} = \frac{0{,}60}{0{,}40}\cdot\frac{45}{4} = 16{,}9$$

$(\eta = 0{,}77) \qquad \nu_1 = g - 1 = 4;\ \nu_2 = N - g = 45;\ F_{st} = \{2{,}6 - 3{,}8 - 5{,}6\}$

Критерий криволинейности

$$F_\xi = \frac{\eta^2 - r^2}{1-\eta^2}\cdot\frac{N-g}{g-2} = \frac{0{,}60 - 0{,}09}{0{,}4}\cdot\frac{45}{3} = 19{,}2$$

$\nu_1 = g - 2 = 3;\ \nu_2 = N - g = 45,\ F_{st} = \{2{,}8 - 4{,}3 - 6{,}6\}$ (табл. VI)

Тетрахорический коэффициент корреляции

2 \ 1	+	−	
+	a	b	a+b
−	c	d	c+d
	a+c	b+d	N

$$r_{++}=\frac{(ad-bc)-\frac{N}{2}}{\sqrt{(a+c)(b+d)(a+b)(c+d)}}$$

$\chi^2=Nr_{++}$ $\quad \nu=1$

$\chi^2_{st}=\{3{,}8-6{,}6-10{,}8\}$ (табл. IX)

	+	−	
+	10	2	12
−	3	20	23
	13	22	35

$$r_{++}=\frac{(10\cdot 20-2\cdot 3)-17{,}5}{\sqrt{13\cdot 22\cdot 23\cdot 12}}=+0{,}63$$

$\chi^2=35\cdot 0{,}63^2=\underline{13{,}9}$

$\nu=(q_1-1)(q_2-1)=(2-1)\cdot(2-1)=1$

$\chi^2_{st}=\{3{,}8-6{,}6-10{,}8\}$

Полихорический коэффициент корреляции

$$K=\sqrt{\frac{\varphi^2}{\sqrt{(q_1-1)(q_2-1)}}} \qquad \varphi^2=\sum\left\{\frac{\sum f^2/n_2}{n_1}\right\}-1$$

$\chi^2=N\varphi^2 \qquad \nu=(q_1-1)(q_2-1)$

2 \ 1	A	B	C	n_2
D	30(900) 22,5	9(81) 2,02	1(1) 0,02	40
E	5(25) 0,83	21(144) 14,70	4(16) 0,53	30
F	2(4) 0,13	3(9) 0,30	25(625) 20,83	30
n_1	37	33	30	100
$\sum\frac{f^2}{n_2}$	23,46	17,02	21,38	
$\frac{\sum f^2/n_2}{n_1}$	0,63	0,52	0,71	=1,86

$N=100 \qquad q_1=3$

$q_2=3$

$\varphi^2=1{,}86-1=0{,}86$

$$K=\sqrt{\frac{0{,}86}{\sqrt{2\cdot 2}}}=0{,}66$$

$\chi^2=100\cdot 0{,}86=\underline{86}$

$\nu=(q_1-1)(q_2-1)=2\cdot 2=4$

$\chi^2_{st}=\{9{,}5-13{,}3-18{,}5\}$ (табл. VIII)

$\boxed{\begin{array}{l} f\ (f^2) \\ f^2 : n_2 \end{array}}$

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов для количественных признаков, для малых групп

	Градации 1	2	3	4	5	Число градаций $q=5$	Факториальная *) дисперсия $C_x=\sum H_i-H_\Sigma=552-500=52$
Даты V	2, 3, 1	4, 3, 6, 3	5, 6, 4, 6, 9	9, 7, 6, 6	3, 6, 5, 6	$H_\Sigma=\frac{(\sum V)^2}{N}=\frac{100^2}{20}=500$; Объём комплекса: $N=\sum n=20$	Случайная дисперсия $C_z=\sum V^2-\sum H_i=586-552=34$; Общая дисперсия $C_v=\sum V^2-H_\Sigma=586-500=86$
n	3	4	5	4	4		
$\sum V$	6	16	30	28	20	$\sum\sum V=100$	Факториальная варианса $\sigma_x^2=C_x/q-1=52/4=13{,}00$
$H_i=\frac{(\sum V)^2}{n}$	12	64	180	196	100	$\sum H_i=552$	
$\sum V^2$	14	70	194	202	106	$\sum V^2=586$	Случайная варианса $\sigma_z^2=C_z/N-q=34/15=2{,}27$
Частные средние M_i	2	4	6	7	5	Общая средняя $M_\Sigma=5$	

Показатель силы влияния $\eta_x^2=C_x/C_v=52/86=\underline{0{,}605}$

Его ошибка $m_{\eta_x^2}=(1-\eta_x^2)\frac{q-1}{N-q}=0{,}395\cdot\frac{4}{15}=0{,}105$

Его достоверность $F=\frac{\eta_x^2}{m_{\eta_x^2}}=\frac{0{,}605}{0{,}105}=\underline{5{,}76}$ $\quad \nu_1=q-1=4;\ \nu_2=N-q=15$ $\quad F_{st}=\{3{,}1-4{,}9-8{,}3\}$ (табл. VI)

Доверительные границы генерального показателя (приближённые значен.)

$\Delta F_{st}\cdot m_{\eta_x^2}=3{,}1\cdot 0{,}105=0{,}33$; $(\beta=0{,}95)$

$$\tilde{\eta}_x^2 \lessgtr \begin{cases}\eta_x^2+\Delta=0{,}61+0{,}33=0{,}94\\ \eta_x^2-\Delta=0{,}61-0{,}33=0{,}28\end{cases}$$

Достоверность по Фишеру

$$F=\frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}=\frac{13{,}00}{2{,}27}=\underline{5{,}74}$$

Общий вывод

Влияние фактора достоверно с вероятностью $\beta>0{,}99$. Для всех объектов данной категории. Влияние изучаемого фактора может составить не менее 28% от общего влияния всей суммы факторов

Форма итоговой записи

Разнообразие	Дисперсии (суммы квадратов) C	Числа степеней свободы ν	Вариансы (средние квадраты) σ^2
Факториальное (межгрупповое)	52	4	13,00
Случайное (внутригрупповое)	34	15	2,27
Общее	86	19	4,53

$\eta_x^2=\underline{0{,}605}\pm 0{,}105$

$F=\frac{0{,}605}{0{,}105}=\underline{5{,}76}$

$F=\frac{13{,}00}{2{,}27}=\underline{5{,}74}$ (проверка)

$F_{st}=\{3{,}1-4{,}9-8{,}3\}$ (табл. VI)

*) Дисперсия – сумма квадратов центральных отклонений в дисперсном анализе

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов

для количественных признаков
для больших групп
при малозначных датах

А – фактор
$A_1 A_2 A_3 \ldots$ градации
V – результативный признак

V \ A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	n	g = 5
6	1		3			4	$H_\Sigma = \frac{S_1^2}{N} = \frac{127^2}{30} = 537{,}6$
5	3	2	3	2		10	
4	2	2		2	2	8	
3		1		1	3	5	
2				1	2	3	
n_a	6	5	6	6	7	$N = \sum n = 30$	
$\sum fV$	29	21	33	23	21	= 127	
$H_i = \frac{(\sum fV)^2}{n_A}$	140,2	88,2	181,5	88,2	63,0	$\sum H_i = 561.1$	

$S_1 = \sum nV = 127$; $S_2 = \sum nV^2 = 579$

Факториальная дисперсия
$C_x = \sum H_i - H_\Sigma = 561{,}1 - 537{,}6 = 23{,}5$

Случайная дисперсия
$C_z = S_2 - \sum H_i = 579 - 561{,}1 = 17{,}9$

Общая дисперсия
$C_y = S_2 - H_\Sigma = 579 - 537{,}6 = 41.4$

Факториальная варианса
$\sigma_x^2 = \frac{C_x}{g-1} = \frac{23{,}5}{4} = 5{,}875$

Случайная варианса
$\sigma_z^2 = \frac{C_z}{N-g} = \frac{17{,}9}{25} = 0{,}716$

Показатель силы влияния $\eta_x^2 = C_x / C_y = 23{,}5 / 41{,}4 = \underline{0{,}568}$

Его ошибка $m_{\eta_x^2} = (1 - \eta_x^2)\frac{g-1}{N-g} = 0{,}432 \cdot \frac{4}{25} = 0{,}069$

Его достоверность $F = \eta_x^2 / m_{\eta_x^2} = \frac{0{,}568}{0{,}069} = \underline{8{,}2}$ $\nu_1 = 4$; $\nu_2 = 25$ $F_{st} = \{2{,}8 - 4{,}2 - 6{,}5\}$ (табл. VI)

Доверительные границы генерального показателя (приближенные значения)

$\Delta F_{st} \cdot m_{\eta_x^2} = 2{,}8 \cdot 0{,}069 = 0{,}19$ ($\beta = 0{,}95$)

$\eta_x^2 = \begin{cases} \tilde{\eta}_x^2 + \Delta = 0{,}57 + 0{,}19 = 0.76 \\ \tilde{\eta}_x^2 - \Delta = 0{,}57 - 0{,}19 = 0.38 \end{cases}$

Достоверность по Фишеру

$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} = \frac{5{,}875}{0{,}716} = \underline{8{,}2}$

Общий вывод

Влияние достоверно в высшей степени для всех объектов данной категории. Влияние изученного фактора может составить ($\beta = 0{,}95$) не менее 38% и не более 76% от общего влияния всей суммы факторов.

Форма итоговой записи

Разнообразие	Дисперсии (суммы квадратов) C	Числа степеней свободы ν	Вариансы (средние квадраты) σ^2
Факториальное (межгрупповое)	23,5	4	5,875
Случайное (внутригрупповое)	17,9	25	0,716
Общее	41,4	29	1,482

$\eta_x^2 = 0{,}568 \pm 0{,}069$

$F = \frac{0{,}568}{0{,}069} = \underline{8{,}2}$

$F = \frac{5{,}875}{0{,}716} = \underline{8{,}2}$

$F_{st} = \{2{,}8 - 4{,}2 - 6{,}5\}$ (табл. VI)

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов

для количественных признаков
для больших групп
при многозначных датах

А – фактор
$A_1 A_2$ – градации
W – вариации, a – условные отклонения } результативный признак

W	a	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	n	g = 6
3500	5	1		1	1			3	$H_\Sigma = \frac{(\sum na)^2}{N} = \frac{126^2}{50} = 317{,}52$
3450	4	3	2	1	1	1	1	9	
3400	3	2	3	3	2	1	2	13	
3350	2	1	2	4	3	2	1	14	
3300	1			3	2	2	1	8	
3250	0				1	2		3	
n_a		7	7	12	10	8	6	$N = \sum n = 50$	
$\sum fa$		25	21	29	23	13	15	→ = 126	
$H_i = \frac{(\sum fa)^2}{n_A}$		89,3	68,0	70,1	52,9	21,1	37,5	$\sum H_i = 333{,}9$	

$S_1 = \sum na = 126$
$S_2 = \sum na^2 = 400$

Факториальная дисперсия
$C_x = \sum H_i - H_\Sigma = 333{,}9 - 317{,}5 = 16{,}4$

Случайная дисперсия $C_z = S_2 - \sum H_i = 400 - 333{,}9 = 66{,}1$

Общая дисперсия
$C_y = S_2 - H_\Sigma = 400 - 317.5 = 82{,}5$

Факториальная варианса $\sigma_x^2 = \frac{C_x}{g-1} = \frac{16{,}4}{5} = 3{,}28$

Случайная варианса $\sigma_z^2 = \frac{C_z}{N-g} = \frac{66{,}1}{44} = 1{,}50$

Показатель силы влияния $\eta_x^2 = \frac{C_x}{C_y} = \frac{16{,}4}{82{,}5} = \underline{0{,}199}$

Его ошибка $m_{\eta_x^2} = (1 - \eta_x^2)\frac{g-1}{N-g} = 0{,}801 \cdot \frac{5}{44} = 0{,}091$

Его достоверность $F = \eta_x^2 / m_{\eta_x^2} = \frac{0{,}199}{0{,}091} = \underline{2{,}2}$ $\nu_1 = g - 1 = 5$; $\nu_2 = N - g = 44$ $F_{st} = \{2{,}4 - 3{,}5 - 5{,}1\}$ (табл. VI)

Доверительные границы генерального параметра в данном случае не определяются, так как выборочный показатель силы влияния оказался недостаточно достоверным (недостоверным).

$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} = \frac{3{,}28}{1{,}50} = \underline{2{,}2}$

Общий вывод

В выборочном комплексе обнаружено влияние фактора в размере 20%. Выборочный показатель оказался недостоверным. Осталось неизвестным, влияет или не влияет фактор на объекты изучаемой категории в генеральном комплексе.

Форма итоговой записи

Разнообразие	Дисперсии (суммы квадратов) C	Число степеней свободы ν	Вариансы (средние квадраты) σ^2
Факториальное (межгрупповое)	16,4	5	3,28
Случайное (внутригрупповое)	66,1	44	1,50
Общее	82.5	49	1.68

$\eta_x^2 = 0{,}199 \pm 0{,}091$

$F = \frac{0{,}199}{0{,}091} = \underline{2{,}2}$

$F = \frac{3{,}28}{1{,}50} = \underline{2{,}2}$

$F_{st} = \{2{,}4 - 3{,}5 - 5{,}1\}$ (табл. VI)

Алгоритм 28

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов для качественных признаков

Градации	1	2	3	4	5	Число градаций $g = 5$; $H_\Sigma = (\Sigma m)^2 / N = 48^2 / 160 = 14.4$	Факториальная дисперсия $C_x = \Sigma H_i - H_\Sigma = 19.6 - 14.4 = 5.2$
n	20	30	40	30	40	$N = \Sigma n = 160$	Случайная дисперсия $C_z = \Sigma m - \Sigma H_i = 48 - 19.6 = 28.4$
m	2	3	8	15	20	$\Sigma m = 48$	Общая дисперсия $C_y = \Sigma m - H_\Sigma = 48 - 14.4 = 33.6$
$H_i = \frac{m^2}{n}$	0,2	0,3	1,6	7,5	10,0	$\Sigma H_i = 19.6$	Факториальная варианса $\sigma_x^2 = \frac{C_x}{g-1} = \frac{5.2}{4} = 1.300$
$p = \frac{m}{n}$	0,1	0,1	0,2	0,5	0,5	$p_\Sigma = 0.3$	Случайная варианса $\sigma_z^2 = \frac{C_z}{N-g} = \frac{28.4}{155} = 0.183$

Показатель силы влияния $\eta_x^2 = \frac{C_x}{C_y} = \frac{5.2}{33.6} = \underline{0.155}$

Его ошибка $m_{\eta_x^2} = (1 - \eta_x^2)\frac{g-1}{N-g} = 0.845 \cdot \frac{4}{155} = 0.0218$

Его достоверность $F = \eta_x^2 / m_{\eta_x^2} = \frac{0.155}{0.0128} = \underline{7.1}$; $\nu_1 = g - 1 = 4$; $\nu_2 = N - g = 155$

$F_{st} = \{2.4 - 3.4 - 4.9\}$ (табл. VI)

Доверительные границы генерального показателя (приближённые значения)

$\Delta F_{st} \cdot m_{\eta_x^2} = 2.4 \cdot 0.0218 = 0.052$ ($\beta = 0.95$)

$\eta_x^2 < \begin{matrix} \tilde{\eta}_x^2 + \Delta = 0.155 + 0.052 = 0.207 \\ \tilde{\eta}_x^2 - \Delta = 0.155 - 0.052 = 0.103 \end{matrix}$

$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} = \frac{1.300}{0.183} = \underline{7.1}$

Общий вывод: влияние фактора достоверно в высшей степени для всех объектов данной категории. Влияние данного фактора может составить ($\beta = 0.95$) не менее 10% и не более 21% от общего влияния всей суммы факторов.

Форма итоговой записи

Разнообразие	Дисперсия суммы квадратов C	Числа степеней свободы ν	Вариансы (средние квадраты) σ^2	
Факториальное (межгрупповое)	5,2	4	1,300	$\eta_x^2 = 0.155 \pm 0.0128$; $F = \frac{0.155}{0.0218} = \underline{7.1}$
Случайное (внутригрупповое)	28,4	155	0,183	$F = \frac{1.300}{0.183} = \underline{7.1}$
Общее	33,6	159	0,211	$F_{st} = \{2.4 - 3.4 - 4.9\}$ (табл. VI)

Алгоритм 29

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов при множественной характеристике основных объектов

Градации	I		II				III			$g = 3$
Основные объекты	1	2	1	2	3	4	1	2	3	$n = 2, 4, 3$
Первичные даты V_i	3, 1, 1	3, 3, 2, 1	7, 6, 6, 4	8, 7, 6	7, 5, 4, 4	9, 6, 5	2, 1, 1	4, 2, 1	3, 2, 1	$H_\Sigma = \frac{116^2}{30} = 449$
Σn_i	7		14				9			$\Sigma n_i = 30$
ΣV_i	14		84				18			$\Sigma V_i = 116$
$H_i = \frac{(\Sigma V_i)^2}{\Sigma n_i}$	28		504				36			$\Sigma H_i = 568$
ΣV_i^2	34		534				44			$\Sigma V_i^2 = 612$

	X	Z	Y
C	568 − 449 = 119	612 − 568 = 44	612 − 449 = 163
η^2	$\frac{119}{163} = 0.73$	$\frac{44}{163} = 0.27$	1,00
ν	3 − 1 = 2	30 − 3 = 27	30 − 1 = 29
σ^2	$\frac{119}{2} = 59.5$	$\frac{44}{27} = 1.63$	$\frac{163}{29} = 5.62$
F	$\frac{59.5}{1.63} = \underline{36.5}$	$\nu_1 = 2$; $\nu_2 = 27$	$F_{st} = \{3.3 - 5.5 - 9.0\}$ (табл. VI)

Показатель силы влияния $\eta_x^2 = \frac{C_x}{C_y} = 0.73$

Его ошибка $m_{\eta_x^2} = (1 - \eta_x^2) \cdot {}^{g-1}/_{N-g} = (1 - 0.73)\, {}^{3-1}/_{30-3} = 0.02$

$F = \frac{0.73}{0.02} = \underline{36.5}$

$\Delta = F_{0.95} \cdot m = 3.3 \cdot 0.02 = 0.066$

Доверительные границы генерального параметра при $\beta = 0.95$

$\tilde{\eta}_x^2 = 0.73 \pm 0.07 = \{0.66 \div 0.80\}$

Дисперсионный анализ двухфакторных пропорциональных комплексов

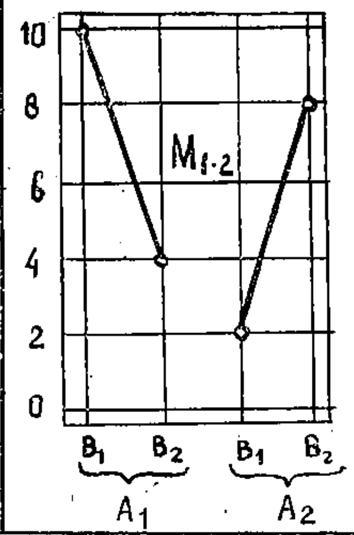
для количественных признаков
для малых групп

первый фактор A, градации A_1 A_2
второй фактор B, градации B_1 B_2
результативный признак V

	A_1 B_1	A_1 B_2	A_2 B_1	A_2 B_2	$g_A=2$, $g_B=2$		n	ΣV	$H=\frac{(\Sigma V)^2}{n}$	M_i
V	8,12	3,4,5	1,3	6,8,10	$H_\Sigma=\frac{(\Sigma V)^2}{N}=360$	A_1	5	32	204,8	6,4
n	2	3	2	3	N=10	A_2	5	28	156,8	5,6
ΣV	20	12	4	24	$\Sigma V=60$	$H_A=361,6$				
ΣV^2	208	50	10	200	$\Sigma V^2=468$	B_1	4	24	144,0	6,0
$H_i=\frac{(\Sigma V)^2}{n}$	200	48	8	192	$\Sigma H_i=448$	B_2	6	36	216,0	6,0
$M_i=\frac{\Sigma V}{n}$	10	4	2	8	$M_\Sigma=6$	$H_B=360,0$				

	A	B	AB	X	Z	Y
C	H_A-H_Σ 1,6	H_B-H_Σ 0,0	$C_x-C_A-C_B$ 86,4	ΣH_i-H_Σ 88,0	$\Sigma V^2-\Sigma H_i$ 20,0	ΣV^2-H_Σ 108,0
$\eta_i^2=C_i/C_y$	0,015	0,000	0,800	0,815	0,185	1,000
ν	g_A-1 1	g_B-1 1	$(g_A-1)(g_B-1)$ 1	$g_A g_B-1$ 3	$N-g_A g_B$ 6	$N-1$ 9
$\sigma_i^2=C_i/\nu_i$	1,6	0,0	86,4	29,33	3,33	
$F_i=\sigma_i^2/\sigma_z^2$	0,5	0,0	25,9	8,9	—	

ν_2 \ ν_1	1	3
6 (табл. $\overline{\nu_I}$)	35,5	23,7
	13,4	9,8
	6,0	4,8



$m_{\eta^2_{AB}}=\nu_{AB}\cdot\eta_z^2/\nu_z=1\cdot 0{,}185/6=0{,}031$; $\bar\eta^2_{AB}=\{0{,}61\div0{,}99\}$

$m_{\eta^2_x}=(1-\eta_x^2)\,\nu_x/\nu_z=0{,}092$; $\bar\eta^2_x=\{0{,}38\div1{,}00\}$

Выводы

1. В выборочном комплексе оказались достоверными только взаимодействие градаций $\tilde\eta^2_{AB}=0{,}80$ $(0{,}61\div0{,}99)$ и суммарное действие факторов $\tilde\eta^2_x=0{,}82$ $(0{,}38\div1{,}00)$.
2. Это означает, что сила каждого фактора в значительной степени определяется градацией другого фактора. При A_1 второй фактор ($B_1\to B_2$) понижает результативный признак в среднем с 10 до 4; при A_2 второй фактор ($B_1\to B_2$) наоборот, повышает результативный признак в среднем от 2 до 8.
3. Анализ действия каждого такого фактора в отдельности без совместного анализа действия обоих факторов даёт ложное заключение о слабом, недостоверном влиянии ($\eta^2\to0$) каждого из таких факторов в отдельности, хотя эти факторы могут иметь большую силу действия, но только при определённой градации другого фактора

Дисперсионный анализ двухфакторных пропорциональных комплексов

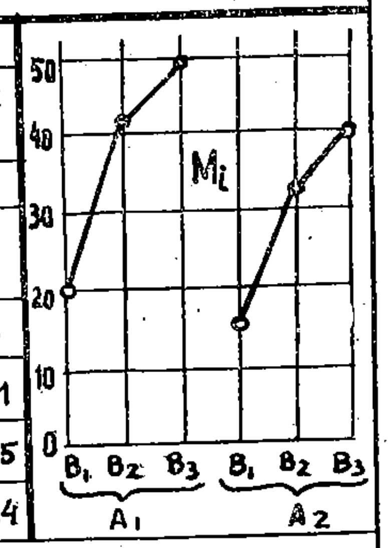
для количественных признаков
для больших групп
$A=10$; $k=10$

первый фактор A, градации A_1A_2
второй фактор B, градации $B_1B_2B_3$
результативный признак:
вариации W
условные отклонения a

W	a	A_1 B_1	A_1 B_2	A_1 B_3	A_2 B_1	A_2 B_2	A_2 B_3	$g_A=2$, $g_B=3$		n	Σfa	$H_i=\frac{(\Sigma fa)^2}{n}$	$\bar a$	$M_i=A+k\bar a$
60	5			2				$H_\Sigma\frac{(\Sigma fa)^2}{N}=\frac{131^2}{50}=343,2$	A_1	25	77	237,2	3,08	40,8
50	4		4	4		1	2		A_2	25	54	116,4	2,16	31,6
40	3		6	3		2	5		$H_A=353,6$					
30	2	1	2			6	2							
20	1	2			2	3								
10	0	1			2									
n		4	12	9	4	12	9	N=50	B_1	8	6	4,5	0,75	17,5
Σfa		4	38	35	2	25	27	$\Sigma fa=131$	B_2	24	63	165,4	2,63	36,3
Σfa^2		6	126	141	2	61	85	$\Sigma fa^2=421$	B_3	18	62	213,6	3,44	44,4
$H_i=\frac{(\Sigma fa)^2}{n}$		4,0	120	136,1	1,0	52,1	81,0	$\Sigma H_i=394,5$	$H_B=383,5$					
$\bar a=\frac{\Sigma fa}{n}$		1,0	3,2	3,9	0,5	2,1	3,0							
$M_i=A+ka$		20,0	42,0	49,0	15	31,0	40,0							

	A	B	AB	X	Z	Y
C	H_A-H_Σ 10,4	H_B-H_Σ 40,3	$C_x-C_A-C_B$ 0,6	ΣH_i-H_Σ 51,3	$\Sigma fa^2-\Sigma H_i$ 26,5	Σfa^2-H_Σ 77,8
$\eta_i^2=C_i/C_y$	0,134	0,518	0,008	0,660	0,340	1,000
ν	g_A-1 1	g_B-1 2	$(g_A-1)(g_B-1)$ 2	$g_A g_B-1$ 5	$N-g_A g_B$ 44	$N-1$ 49
$\sigma_i^2=C_i/\nu_i$	10,4	20,2	0,3	10,3	0,6	
$F_i=\frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	17,3	33,7	0,5	17,2	—	

ν_1 \ ν_2	1	2	5
44 (табл. $\overline{\nu_I}$)	12,5	8,2	5,1
	7,2	5,1	3,5
	4,1	3,2	2,4



$m_{\eta^2_A}=\nu_A\cdot\eta_z^2/\nu_z=1\cdot0{,}34/44=0{,}0077$; $\bar\eta^2_A=\{0{,}10\div0{,}17\}$

$m_{\eta^2_B}=\nu_B\cdot\eta_z^2/\nu_z=2\cdot0{,}34/44=0{,}0154$; $\bar\eta^2_B=\{0{,}47\div0{,}57\}$

$m_{\eta^2_x}=(1-\eta_x^2)\,\nu_x/\nu_z=0{,}34\cdot5/44=0{,}0386$; $\bar\eta^2_x=\{0{,}57\div0{,}75\}$

Выводы

1. В высшей степени достоверным оказалось влияние каждого фактора в отдельности и их суммарного действия.
2. Влияние взаимодействия градаций оказалось очень малым и совершенно недостоверным.
3. Это значит, что в исследовании не обнаружено зависимости влияния каждого фактора от того, при какой градации другого фактора он действовал.

Дисперсионный анализ двухфакторных пропорциональных комплексов для качественных признаков

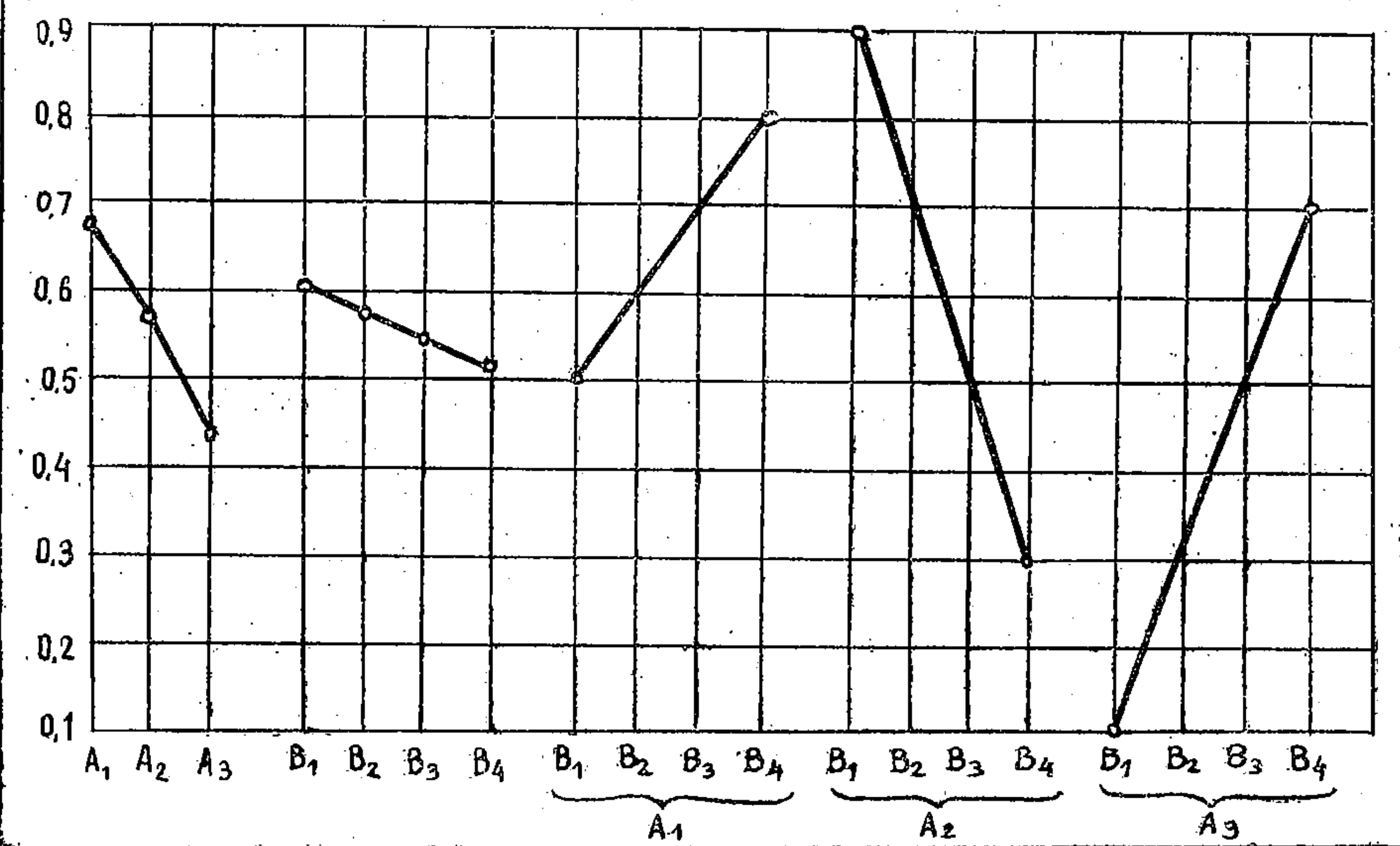
	A_1				A_2				A_3				$g_A=3$, $g_B=4$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4	
n	10	20	10	20	20	40	20	40	10	20	10	20	$N=\sum n=240$
m	5	12	7	16	18	28	10	12	1	6	5	14	$\sum m=134$
$H_i=\frac{m^2}{n}$	2,5	7.2	4,9	12,8	16,2	19,6	5,0	3,6	0,1	1,8	2,5	9,8	$\sum H_i=86{,}0$
$p_x=\frac{m}{n}$	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,70	0,50	0,30	0,10	0,30	0,50	0,70	$H_\Sigma=\frac{(\sum m)^2}{\sum n}=74{,}82$

	A	B	AB	X	Z	Y
C_i	H_A-H_Σ 1.65	H_B-H_Σ 0.18	$C_x-C_A-C_B$ 9,35	$\sum H_i-H_\Sigma$ 11.18	$\sum m-\sum H_i$ 48,0	$\sum m-H_\Sigma$ 59,18
$\eta_i^2=\frac{C_i}{C_y}$	0,028	0,003	0,158	0,189	0,811	1,000
	A	B	AB	X	Z	Y
ν	g_A-1 2	g_B-1 3	$(g_A-1)(g_B-1)$ 6	g_Ag_B-1 11	$N-g_Ag_B$ 228	$N-1$ 239
$\sigma_i^2=\frac{C_i}{\nu_i}$	0,83	0,06	1.56	1,02	0,21	0,25
$F=\frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	4,0	0,3	7,4	4,9	–	-

	$\sum n$	$\sum m$	$H_i=\frac{\sum m^2}{\sum n}$	p_i
A_1	60	40	26,67	0,67
A_2	120	68	38,53	0,57
A_3	60	26	11,27	0,43
$H_A=76{,}47$				
B_1	40	24	14,40	0,60
B_2	80	46	26,45	0,58
B_3	40	22	12,10	0,55
B_4	80	42	22,05	0,53
$H_B=75{,}00$				

$\nu_2 \backslash \nu_1$	2	3	6	11
228	7.2	5,6	3,9	3,1
	4.7	3,9	2,9	2,3
	3,0	2,6	2,1	1.8

(табл. VI)



Дисперсионный анализ двухфакторных неравномерных комплексов для количественных признаков для малых групп

A,B / V	A_1			A_2			$g_A=2$, $g_B=3$
	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	
V	2,3,4,	3,3, 3,4	4,5,6, 7,8	2,3, 3,4	7,8,8, 9,9	4,5,5, 5,6	
n	3	4	5	4	5	5	$N=26$
$\sum V$	9	13	20	12	41	25	$\sum V=130$
$\sum V^2$	29	43	190	38	339	127	$\sum V^2=766$
$H_i=\frac{(\sum V)^2}{n}$	27,0	42,3	180,0	36,0	336,2	125,0	$\sum H_i=746{,}5$
$M_x=\frac{(\sum V)^2}{n}$	3,0	3,3	6,0	3,0	8,2	5,0	$\sum M_x=28{,}5$
M_x^2	9,00	10,89	36,00	9,00	67,24	25,00	$\sum M_x^2=157{,}13$

	число средних g	$\sum M_x$	$M_i=\frac{\sum M_x}{g}$	M_i^2
A_1	3	12,3	4,1	16,81
A_2	3	16,2	5,4	29,16
$H_A=\sum M_A^2=45{,}97$				
B_1	2	6,0	3,0	9,0
B_2	2	11,5	5,8	33,64
B_3	2	11,0	5,5	30,25
$H_B=\sum M_B^2=72{,}89$				

$$M=\frac{\sum M_x}{g_A g_B}=\frac{28{,}5}{6}=4{,}75; \quad M^2=22{,}56$$

$$H_\Sigma=\frac{(\sum V)^2}{N}=\frac{130^2}{26}=650$$

$$C'_A=N\left(\frac{\sum M_A^2}{g_A}-M^2\right)=26\left(\frac{45{,}97}{2}-22{,}56\right)=11{,}05$$

$$C_Y=\sum V^2-H_\Sigma=766-650=116$$

$$C'_B=N\left(\frac{\sum M_B^2}{g_B}-M^2\right)=26\left(\frac{72{,}89}{3}-22{,}56\right)=45{,}15$$

$$C_Z=\sum V^2-\sum H_i=766-746{,}5=19{,}5$$

$$C'_X=N\left(\frac{\sum M_x^2}{g_A g_B}-M^2\right)=26\left(\frac{157{,}13}{6}-22{,}56\right)=\boxed{93{,}34}$$

$$C_X=\sum H_i-H_\Sigma=746{,}5-650=\boxed{96{,}5}$$

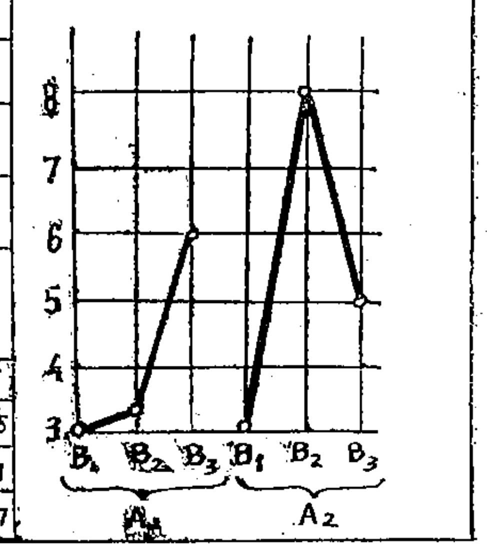
$$C'_{AB}=C'_X-C'_A-C'_B=94{,}34-11{,}05-45{,}15=38{,}14$$

$$\alpha=\frac{C_X}{C'_X}=\frac{96{,}5}{94{,}38}=1{,}023$$

	A	B	AB	X	Z	Y
C'	11,05	45,15	38,14	94,4	–	–
$C=\alpha\cdot C'$	11,3	46,2	39,0	96,5	19,5	116,0
$\eta^2=\frac{C_i}{C_Y}$	0,097	0,390	0,336	0,831	0,169	1,000
ν	g_A-1 1	g_B-1 2	$\nu_A\cdot\nu_B$ 2	g_Ag_B-1 5	$N-g_A\cdot g_B$ 20	$N-1$ 25
$\sigma_i^2=\frac{C_i}{\nu_i}$	11,3	23,1	19,5	19,3	0,98	
$F_i=\frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	11,6	23,8	19,8	19,7		

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	5
20	14,8	10,0	6,5
	8,1	5,8	4,1
	4,3	3,5	2,7

Табл. VI



9*

Алгоритм 34

Дисперсионный анализ двухфакторных неравномерных комплексов для количественных признаков для больших групп

A. B		A_1		A_2		A_3		$g_A = 3$, $g_B = 2$		g	$\sum\bar a$	$M_i = \frac{\sum\bar a}{g}$	M_i^2
W	a	B_1	B_2	B_1	B_2	B_1	B_2						
45	5						2	—	A_1	2	3	1,5	2,25
40	4		1		2		5		A_2	2	4	2,0	4,00
35	3		1	1	1	1			A_3	2	5	2,5	6,25
30	2	1	3	1	2	1	1		$H_A = 12{,}50$				
25	1	2	3			5							
20	0	1		3		3			B_1	3	3	1,0	1,00
n		4	8	5	5	10	8	$N = 40$	B_2	3	9	3,0	9,00
$\sum fa$		4	16	5	15	10	32	$S_1 = 82$	$H_B = 10{,}00$				
$\sum fa^2$		6	40	13	49	18	134	$S_2 = 260$	$V_2 \backslash V_1$		1	2	5
$H_i = \frac{(\sum fa)^2}{n}$		4,0	32,0	5,0	45,0	10,0	128,0	$\sum H_i = 224$	34 (табл. VI)		13,1	8,6	5,4
$\bar a = \frac{\sum fa}{n}$		1	2	1	3	1	4	$\sum\bar a = 12$			7,4	5,3	3,6
$\bar a^2$		1	4	1	9	1	16	$\sum\bar a^2 = 32$			4,1	3,3	2,5

$M = \frac{\sum\bar a}{g_A g_B} = \frac{12}{6} = 2;\quad M^2 = 4$

$H_\Sigma = \frac{S_1^2}{N} = \frac{82^2}{40} = 168{,}1$

$C'_A = 40\left(\frac{H_A}{g_A} - M^2\right) = 40\left(\frac{12{,}50}{3} - 4\right) = 6{,}7$

$C_y = S_2 - H_\Sigma = 260 - 168{,}1 = 91{,}9$

$C'_B = 40\left(\frac{H_B}{g_B} - M^2\right) = 40\left(\frac{10{,}0}{2} - 4\right) = 40{,}0$

$C_z = S_2 - \sum H_i = 260 - 224 = 36{,}0$

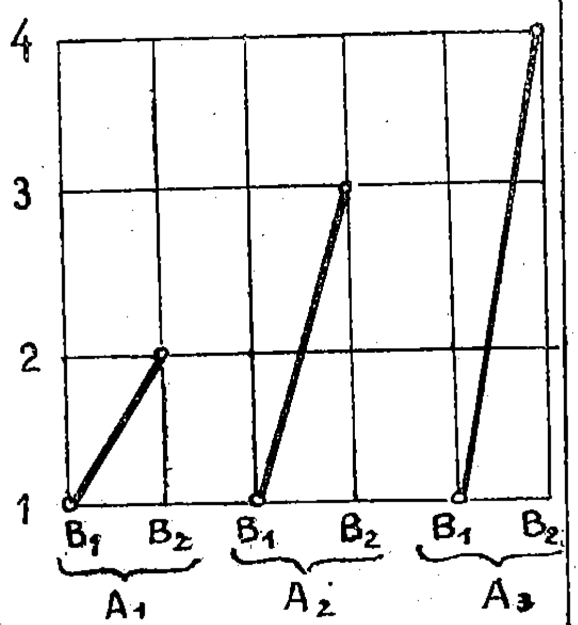
$C'_x = 40\left(\frac{\sum\bar a^2}{g_A g_B} - M^2\right) = 40\left(\frac{32}{6} - 4\right) = \boxed{53{,}3}$

$C_x = \sum H_i - H_\Sigma = 224 - 168{,}1 = \boxed{55{,}9}$

$C'_{AB} = C'_x - C'_A - C'_B = 53{,}3 - 6{,}8 - 40{,}0 = 6{,}6$

$\alpha = \frac{C_x}{C'_x} = \frac{55{,}9}{53{,}3} = 1{,}049$

	A	B	AB	X	Z	Y
C'	6,7	40,0	6,6	53,3	—	—
$C = \alpha C'$	7,1	42,0	6,8	55,9	36,0	91,9
$\eta_i^2 = \frac{C_i}{C_y}$	0,077	0,457	0,074	0,608	0,392	1,000
ν	$g_A - 1$ 2	$g_B - 1$ 1	$(g_A-1)\cdot(g_B-1)$ 2	$g_A g_B - 1$ 5	$N - g_A g_B$ 34	$N-1$ 39
$\sigma^2 = \frac{C_i}{\nu_i}$	3,5	42,0	3,4	11,2	1,059	—
$F_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	3,3	39,7	3,2	10,6	—	—



Алгоритм 35

Дисперсионный анализ двухфакторных неравномерных комплексов для качественных признаков

	A_1			A_2			$g_A = 2$, $g_B = 3$		g	$\sum p_x$	$M_i = \frac{\sum p_x}{g}$	M_x^2
	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3						
n	70	20	10	10	100	90	$N = 300$	A_1	3	1,5	0,5	0,25
								A_2	3	0,9	0,3	0,09
m	14	10	8	1	30	45	$\sum m = 108$	$\sum M_A^2 = 0{,}340$				
$H_i = \frac{m^2}{n}$	2,8	5,0	6,4	0,1	9,0	22,5	$\sum H_i = 45{,}8$	B_1	2	0,3	0,15	0,0225
								B_2	2	0,3	0,40	0,1600
p_x	0,2	0,5	0,8	0,1	0,3	0,5	$\sum p_x = 2{,}4$	B_3	2	0,3	0,65	0,4225
p_x^2	0,04	0,25	0,64	0,01	0,09	0,25	$\sum p_x^2 = 1{,}28$	$\sum M_B^2 = 0{,}605$				

$M = \frac{\sum p_x}{g_A g_B} = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}4;\qquad M^2 = 0{,}16$

$H_\Sigma = \frac{(\sum m)^2}{N} = \frac{108^2}{300} = 38{,}9$

$C'_A = N\left(\frac{\sum M_A^2}{g_A} - M^2\right) = 300\left(\frac{0{,}34}{2} - 0{,}16\right) = 3{,}0$

$C_y = \sum m - H_\Sigma = 108 - 38{,}9 = 69{,}1$

$C'_B = N\left(\frac{\sum M_B^2}{g_B} - M^2\right) = 300\left(\frac{0{,}605}{3} - 0{,}16\right) = 12{,}6$

$C_z = \sum m - \sum H_i = 108 - 45{,}8 = 62{,}2$

$C'_x = N\left(\frac{\sum p_x^2}{g_A g_B} - M^2\right) = 300\left(\frac{1{,}28}{6} - 0{,}16\right) = \boxed{15{,}9}$

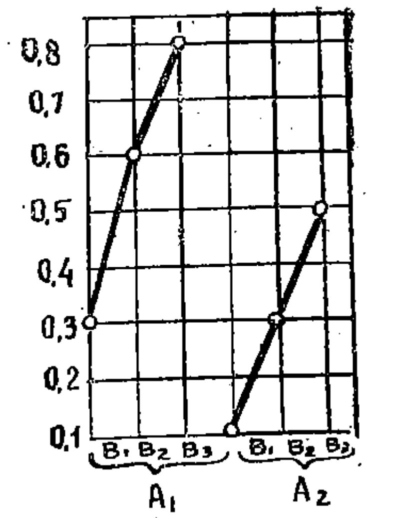
$C_x = \sum H_i - H_\Sigma = 45{,}8 - 38{,}9 = \boxed{6{,}9}$

$C'_{AB} = C'_x - C'_A - C'_B = 15{,}9 - 3{,}0 - 12{,}6 = 0{,}3$

$\alpha = \frac{C_x}{C'_x} = \frac{6{,}9}{15{,}9} = 0{,}434$

	A	B	AB	X	Z	Y
C'	3,0	12,6	0,3	15,9	—	—
$C = \alpha C'$	1.30	5,47	0,13	$C_x = 6{,}90$	$C_z = 62{,}2$	$C_y = 69{,}1$
$\eta_i^2 = \frac{C_i}{C_y}$	0,019	0,079	0,002	0,100	0,900	1,000
ν	$g_A - 1$ 1	$g_B - 1$ 2	$(g_A-1)(g_B-1)$ 2	$g_A g_B - 1$ 5	$N - g_A g_B$ 294	$N-1$ 299
$\sigma_i^2 = \frac{C_i}{\nu_i}$	1.30	2,74	0.07	1.38	0,212	
$F_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	6,1	12,9	0,3	6,5	—	

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3
294 (табл. VI)	11,2	7,2	4,3
	6,8	4,7	3,2
	3,9	3,0	2,3



В дисперсионных комплексах варианты неаддитивны

[Расчёт аддитивности C и неаддитивности σ^2]

$$\sigma_x^2 + \sigma_z^2 \neq \sigma_y^2$$

Градации фактора	A_1	A_2	A_3	$g = 3$
Даты V	1.2.3	3.4.5	5.6.7	$n = 3$
Объём градаций n	3	3	3	$N = 9$
Суммы дат ΣV	6	12	18	$\Sigma\Sigma V = 36$
Частные средние M_i	2	4	6	$M_\Sigma = 36/9 = 4$

Разнообразие	Суммы квадратов C	Числа степеней свободы ν	Средние квадраты, вариансы σ^2
Факториальное x	$C_x = \sum n(M_i - M_\Sigma)^2 = 24$	$\nu_x = g - 1 = 2$	$\sigma_x^2 = \frac{C_x}{\nu_x} = 12{,}00$
Случайное z	$C_z = \sum (V - M_i)^2 = 6$	$\nu_z = N - g = 6$	$\sigma_z^2 = \frac{C_z}{\nu_z} = 1{,}00$
Общее y	$C_y = \sum (V - M_\Sigma)^2 = 30$	$\nu_y = N - 1 = 8$	$\sigma_y^2 = \frac{C_y}{\nu_y} = 3{,}75$

$$C_x + C_z = C_y \qquad \nu_x + \nu_z = \nu_y \qquad \sigma_x^2 + \sigma_z^2 \neq \sigma_y^2$$

$$24 + 6 = 30 \qquad 2 + 6 = 8 \qquad 12{,}00 + 1{,}00 \neq 3{,}75$$

Аддитивные суммы квадратов C_x, C_z, C_y, делённые на неравные числа степеней свободы $\nu_x = g - 1$; $\nu_z = N - g$; $\nu_y = N - 1$, неизбежно дают неаддитивные варианты: $12{,}00 + 1{,}00 \neq 3{,}75$

Следствия:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \neq \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}$$

$$\frac{12{,}00}{3{,}75} \neq \frac{12{,}00}{12{,}00 + 1{,}00}$$

$$3{,}2 \neq 0{,}92$$

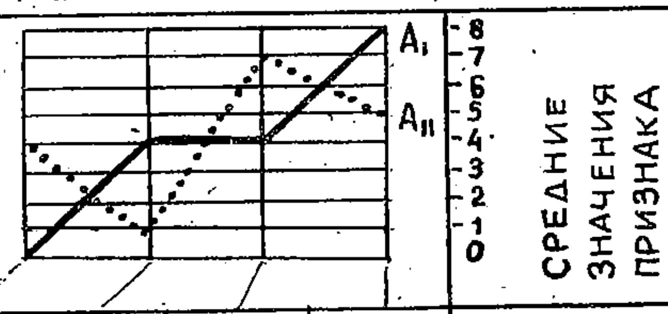
$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \neq \eta_x^2 \longrightarrow 3{,}2 \neq 0{,}8$$

$$\eta_x^2 = C_x / C_y = 24/30 = 0{,}8 =$$

= квадрат корреляционного отношения Пирсона

Схема анализа различий двух процессов (достоверность различия двух рядов регрессии)

Изменения величины признака (1–8), у объектов двух категорий (A_I; A_{II}), или в двух состояниях под влиянием разных увеличивающихся воздействий ($B_0\ B_1\ B_2\ B_3$)



Дозы воздействия		B_1	B_2	B_3	B_4	$g = 4$
Индивидуальные значения признака	V_1	011112	344445	3445	7889	
	V_2	344445	011112	6778	4556	
Число объектов (повторность)	n_1	6	6	4	4	$N = 40$
	n_2	6	6	4	4	
Частные средние	M_1	1	4	4	8	$\nu_z = N - 2g = 32$
	M_2	4	1	7	5	
Частные разности	$d = M_1 - M_2$	−3	+3	−3	+3	$\sum \omega d = 0$; $\sum \omega d^2 = 90$
Веса частных разностей	$\omega = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$	3	3	2	2	$\sum \omega = 10$
Достоверность частных разностей	$F = \frac{\omega d^2}{\sigma_z^2}$	54	54	36	36	$\sigma_z^2 = \frac{\sum V^2 - \sum h}{N - 2g} = 0{,}5$
	$\nu_1 = 1$	1	1	1	1	
	$\nu_2 = n_1 + n_2 - 2$	10	10	6	6	

I. Оценка различий среднего уровня процессов

Достоверность отличия от нуля средней разности между частными средними, взвешенной оператором $\omega = (n_1 n_2) : (n_1 + n_2)$

$$F_1 = t^2 = \left(\frac{Md}{md}\right)^2 = \left(\frac{\sum \omega d}{\sum \omega}\right)^2 \cdot \frac{\sum \omega}{\sigma_z^2} = \frac{(\sum \omega d)^2}{\sigma_z^2 \sum \omega} = \frac{0^2}{0{,}5 \cdot 1{,}0} = 0{,}0$$

$\nu_1 = 1$ $\nu_2 = \nu_z = 32$ $F_{st} = \{4{,}1 - 7{,}5 - 13{,}2\}$ (табл. VI)

II. Оценка непараллельности процессов

Достоверность отличия разнообразия частных разностей от случайного разнообразия

$$F_2 = \frac{\sigma_{AB}^2}{\sigma_z^2} = \frac{\sum \omega (d_i - \bar{d})^2}{\nu_B\ \sigma_z^2} = \frac{\sum \omega d^2 - \frac{(\sum \omega d)^2}{\sum \omega}}{(g - 1)\ \sigma_z^2} = \frac{90 - 0}{3 \cdot 0{,}5} = 60{,}0$$

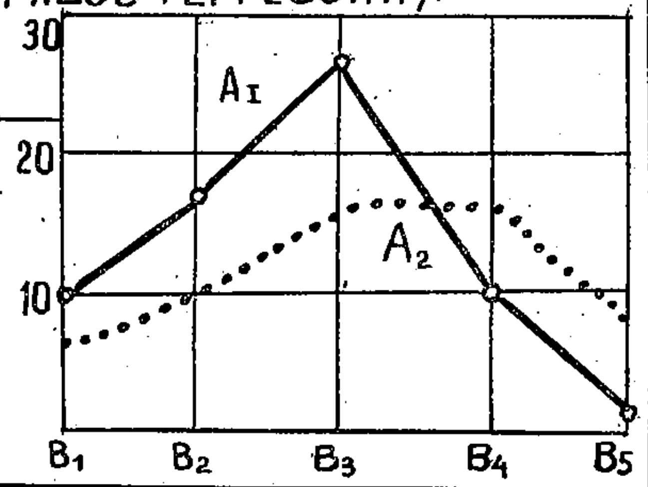
$\nu_1 = g - 1 = 3$ $\nu_2 = \nu_z = 32$ $F_{st} = \{2{,}9 - 4{,}5 - 7{,}1\}$ (табл. VI)

Сравнение двух процессов (A_I; A_{II})

(Достоверность различия двух рядов регрессии)

Признаки – количественные

Комплексы – малые



		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
V	A_I	9,10,11	13,16,19	20,26,27 28,29,32	7,10,13	2,3,3,4
	A_{II}	3,6,9	8,10,12	10,13,14 15,16,22	8,14,15 16,17,20	1,8,15
$\sum V$	I	30	48	162	30	12
	II	18	30	90	90	24
n	I	3	3	6	3	4
	II	3	3	6	6	3
$h=\frac{(\sum V)^2}{n}$	I	300	768	4374	300	36
	II	108	300	1350	1350	192
$\sum V^2$	I	302	786	4454	318	38
	II	126	308	1430	1430	290
$M=\frac{\sum V}{n}$	I	10	16	27	10	3
	II	6	10	15	15	8
$d=M_1-M_2$		+4	+6	+12	−5	−5
d^2		16	36	144	25	25
$\omega=\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$		1,5	1,5	3,0	2,0	1,7
ωd		+6.0	+9,0	+36,0	−10,0	−8,5
ωd^2		24,0	54,0	432,0	50,0	42,5
$F_i=\frac{\omega d^2}{\sigma_z^2}$		1,8	4,0	32,1	3,7	3,2
$\nu_1=1;\ \nu_2=:$		4	4	10	7	5

$N=40 \qquad g=5$

$\sum h = 9078$

$\sum V^2 = 9482$

$C_z=\sum V^2-\sum h=404$

$\sigma_z^2=\frac{C_z}{\nu_z}=13,47$

$\sum \omega = 9,7$

$\sum \omega d = +32,5$

$\frac{(\sum \omega d)^2}{\sum \omega}=108,89=T_1$

$\sum \omega d^2 = 602,5 = T_2$

$\nu_z = N-2g=30$

Критерий различия среднего уровня процессов

$F_1=\frac{T_1}{\sigma_z^2}=\frac{108,89}{13,47}=8,1 \qquad \nu_1=1;\ \nu_2=\nu_z=30 \qquad F_{st}=\{4,2-7,6-13,3\}$ (табл. VI)

Критерий непараллельности процессов

$F_2=\frac{T_2-T_1}{(g-1)\sigma_z^2}=\frac{602,5-108,89}{4\cdot 13,47}=9,2 \qquad \nu_1=g-1=4;\ \nu_2=\nu_z=30 \qquad F_{st}=\{2,8-4,2-6,5\}$ (табл. VI)

Достоверность влияния фактора „В" отдельно в каждом процессе

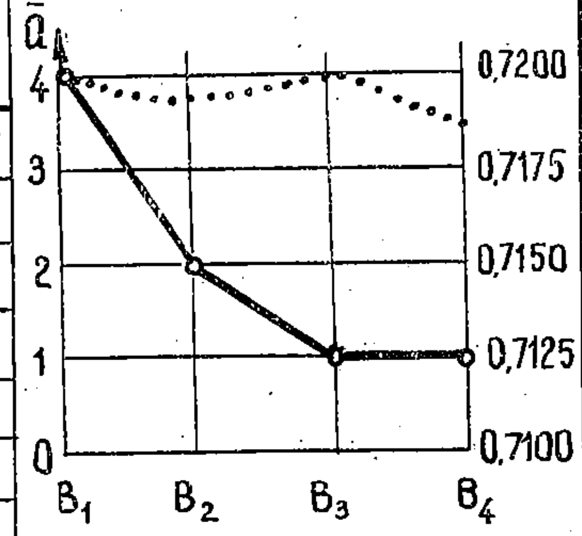
	N	g	$\sum V$ S_1	$\sum V^2$ S_2	$\sum h$	S_1^2/N H_Σ	$\sum h-H_\Sigma$ C_x	$S_2-\sum h$ C_z	$g-1$ ν_x	$N-g$ ν_z	$\frac{C_x}{C_x+C_z}=\eta_x^2$	$\frac{C_x}{C_z}\cdot\frac{\nu_z}{\nu_x}$ F	F_{st}
$B \to A_I$	19	5	282	5898	5778	4185,5	1592,5	120,0	4	14	0,930	46,4 ≡	3,1−5,0−8,6
$B \to A_{II}$	21	5	252	3584	3300	3024,0	276,0	254,0	4	16	0,521	4,3 —	3,0−4,8−7,9

Сравнение двух процессов (A_I A_{II})

(Достоверность различий двух рядов регрессии)

Признаки – количественные; комплексы – большие

W	A_I B_1	B_2	B_3	B_4	n_{A_I}	A_{II} B_1	B_2	B_3	B_4	$n_{A_{II}}$	n_2	a	a^2
0,7225	1				1	1	1	1	1	4	5	5	25
0,7200	4	1			5	4	3	2	1	10	15	4	16
0,7175	1	1			2	1	2	1	1	5	7	3	9
0,7150		1	1	1	3				1	1	4	2	4
0,7125		1	3	2	6						6	1	1
0,7100		1	1	1	3						3	0	0
n_1	6	5	5	4	20	6	6	4	4	20	N=40		
$\sum fa$	24	10	5	4		24	23	16	14		(120)		
$h=\frac{(\sum fa)^2}{n_1}$	96,0	20,0	5,0	4,0		96,0	88,2	64.0	49,0		$\sum h=422,2$		
$\bar a$	4.0	2,0	1,0	1,0		4,0	3.8	4,0	3.5		—		



		B_1	B_2	B_3	B_4
n	A I	6	5	5	4
	A II	6	6	4	4
$\bar a$	A I	4,0	2,0	1,0	1,0
	A II	4,0	3,8	4,0	3,5
$d=(I-II)$		0	−1,8	−3,0	−2,5
d^2		0	3,24	9.00	6.25
$\omega=\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$		3,000	2,727	2,222	2,000
ωd		0	−4,909	−6,666	−5,000
ωd^2		0	8,835	19,998	12,500
$F_i=\omega d^2/\sigma_z^2$		0	10,2	23,0	14,4
$\nu_1=1;\ \nu_2=:$		10	9	7	6

$N=40 \qquad g=4$

$\sum n_2 a^2=450 \qquad \sum h=422,2$

$C_z=\sum n_2 a^2-\sum h=27.8$

$\sigma_z^2=C_z/\nu_z=0.869$

$\sum \omega = 9,949$

$\sum \omega d = -16,575$

$\frac{(\sum \omega d)^2}{\sum \omega}=27,614=T_1$

$\sum \omega d^2 = 41.333 = T_2$

$\nu_z=N-2g=32$

Критерий различия среднего уровня процессов

$F_1=\frac{T_1}{\sigma_z^2}=\frac{27,614}{0,869}=31,78 \qquad \nu_1=1;\ \nu_2=\nu_z=32 \qquad F_{st}=\{4,1-7,9-13,2\}$ (табл. VI)

Критерий непараллельности процессов

$F_2=\frac{T_2-T_1}{(g-1)\sigma_z^2}=\frac{41,333-27,614}{3\cdot 0,869}=5,26 \qquad \nu_1=g-1=3;\ \nu_2=\nu_z=32 \qquad F_{st}=\{2,9-4,5-7,0\}$ (табл. VI)

Достоверность влияния фактора „В" отдельно в каждом процессе

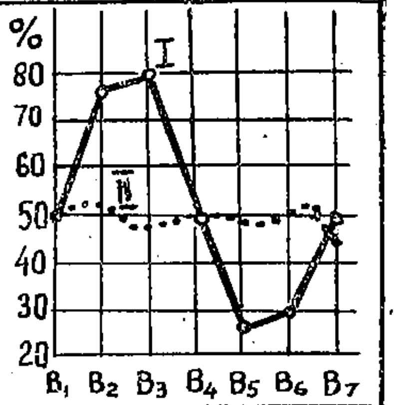
	N	g	$\sum n_A \cdot a$ S_1	$\sum n_A \cdot a^2$ S_2	$\sum h$	S_1^2/N H_Σ	$\sum h-H_\Sigma$ C_x	$S_2-\sum h$ C_z	ν_x	ν_z	$\frac{C_x}{C_x+C_z}=\eta_x^2$	$\frac{C_x}{C_z}\cdot\frac{\nu_z}{\nu_x}=F$	F_{st}
$B \to A_I$	20	4	43	141	125,0	92,5	32.5	16.0	3	16	0,670	10,8 ≡	2,9-4,4-7,1
$B \to A_{II}$	20	4	77	309	297.2	296,5	0,7	11,6	3	16	0,056	0,3 ~~~	2,9-4,4-7,1

Сравнение двух процессов

(достоверность различия двух рядов регрессии)
признаки – качественные
доли – средние: $0{,}20 < p < 0{,}80$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	$g=7$
n I / II	100 / 80	80 / 100	120 / 100	100 / 120	80 / 100	120 / 100	100 / 100	$N=1400$
m I / II	52 / 40	60 / 52	96 / 48	50 / 60	20 / 48	36 / 52	50 / 47	$\sum m=711$
$h=\frac{m^2}{n}$ I / II	27,0 / 20,0	45,0 / 27,0	76,8 / 23,0	25,0 / 30,0	5,0 / 23,0	10,8 / 27,0	25,0 / 22,1	$\sum h=386{,}7$
$p=\frac{m}{n}$ I / II	0,52 / 0,50	0,75 / 0,52	0,80 / 0,48	0,50 / 0,50	0,25 / 0,48	0,30 / 0,52	0,50 / 0,47	$C_z=\sum m-\sum h=323{,}3$
$d=p_1-p_2$	+0,02	+0,23	+0,32	0	−0,23	−0,22	+0,03	$\nu_z=N-2g=1386$
d^2	0,0004	0,0529	0,1024	0	0,0529	0,0484	0,0009	$\sigma_z^2=\frac{C_z}{\nu_z}=0{,}233$
$\omega=\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$	44,44	44,45	54,54	54,55	44,44	54,54	50,00	$\sum\omega=366{,}96$
ωd	+0,89	+10,22	+17,45	0	−10,22	−12,00	+1,50	$\sum\omega d=+7{,}84$; $\frac{(\sum\omega d)^2}{\sum\omega}=0{,}18=T_1$
ωd^2	0,02	2,35	5,58	0	2,35	2,64	0,05	$\sum\omega d^2=12{,}99=T_2$
$F_i=\frac{\omega d^2}{\sigma_z^2}$	0,1	10,1	23,9	0	10,1	11,3	0,2	

$\nu_1 \backslash \nu_2$	178	198	218
1	3,9 – 6,8 – 11,2	3,9 – 6,8 – 11,2	3,9 – 6,8 – 11,2



Критерий различия среднего уровня процессов

$F_1=\frac{T_1}{\sigma_z^2}=\frac{0{,}18}{0{,}233}=\underline{0{,}8}$ $\quad \nu_1=1;\ \nu_2=\nu_z=1386$ $\quad F_{st}=\{2{,}1-3{,}0-3{,}8\}$ (табл. VI)

Критерий непараллельности процессов

$F_2=\frac{T_2-T_1}{(g-1)\sigma_z^2}=\frac{12{,}99-0{,}18}{6\cdot 0{,}233}=\underline{9{,}2}$ $\quad \nu_1=g-1=6;\ \nu_2=\nu_z=1386$ $\quad F_{st}=\{2{,}1-3{,}0-3{,}8\}$ (табл. VI)

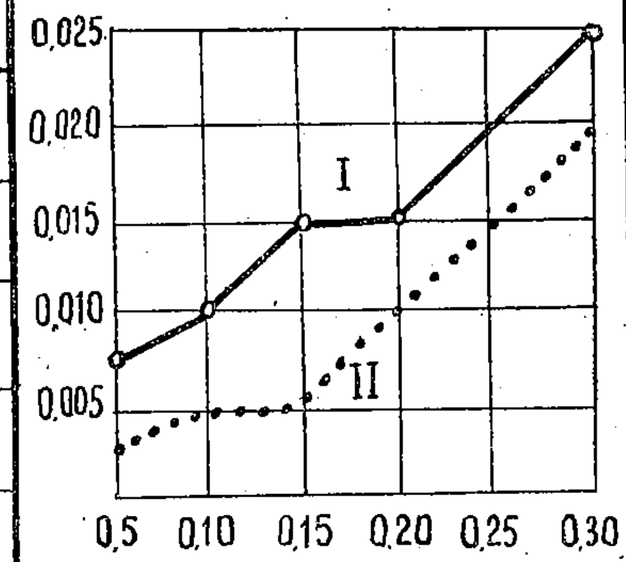
Достоверность влияния фактора „B" отдельно в каждом процессе

	N	g	$\sum m$	$\sum n$	$\frac{(\sum m)^2}{N}$ H_Σ	$\sum h-H_\Sigma$ C_x	$\sum m-\sum h$ C_z	ν_x	ν_z	$F=\frac{C_x}{C_z}\cdot\frac{\nu_z}{\nu_x}$	F_{st}
$B \to A_1$	700	7	364	214,6	189,3	25,2	149,4	6	693	19,5	2,1 – 2,8 – 3,8
$B \to A_2$	700	7	347	172,1	172,0	0,1	174,9	6	693	0,1	2,1 – 2,8 – 3,8

Сравнение двух процессов ($A_I\,A_{II}$)

(достоверность различия двух рядов регрессии)
признаки – качественные
доли – крайние: $0{,}2 > p$; $p > 0{,}8$

	B_5	B_{10}	B_{15}	B_{20}	B_{30}	
n A_I / A_{II}	1000 / 500	2000 / 1000	500 / 1000	1000 / 1000	2000 / 2000	
m A_I / A_{II}	7 / 1	18 / 4	7 / 6	15 / 11	50 / 38	
p A_I / A_{II}	0,007 / 0,002	0,009 / 0,004	0,014 / 0,006	0,015 / 0,011	0,025 / 0,019	
φ A_I / A_{II}	0,168 / 0,090	0,190 / 0,127	0,237 / 0,155	0,246 / 0,210	0,318 / 0,277	
$d=\varphi_I-\varphi_{II}$	+0,078	+0,063	+0,082	+0,036	+0,041	
d^2	0,006	0,004	0,007	0,001	0,002	$N=12000$; $g=5$; $\nu_z=N-2g=11990$
$\omega=\frac{n_1\cdot n_2}{n_1+n_2}$	333	667	333	500	1000	$\sum\omega=2833$
ωd	+25,97	+42,02	+27,31	+18,00	+41,00	$\sum\omega d=+154{,}03$; $\frac{(\sum\omega d)^2}{\sum\omega}=8{,}37=T_1$
$F_i=\omega d^2$	2,00	2,67	2,33	0,50	2,00	$\sum\omega d^2=9{,}50=T_2$
$\nu_1=1$ $\nu_2=$	1498	2998	1498	1998	3998	
$\varphi_i-\bar\varphi$ I / II	−0,070 / −0,108	−0,048 / −0,071	−0,001 / −0,043	+0,008 / +0,012	+0,080 / +0,079	$\sum n\varphi_I=1548{,}5$; $\bar\varphi_I=0{,}238$; $\sum n\varphi_{II}=1091{,}0$; $\bar\varphi_{II}=0{,}198$
$(\varphi_i-\bar\varphi)^2$ I / II	0,005 / 0,012	0,002 / 0,005	0,000 / 0,002	0,000 / 0,000	0,006 / 0,006	$\sum n(\varphi_i-\bar\varphi)^2_I=21{,}00 \to C_x(I)$; $\sum n(\varphi_i-\bar\varphi)^2_{II}=25{,}00 \to C_x(II)$



Критерий различия среднего уровня процессов

$F_1=T_1=\underline{8{,}4}$ $\quad \nu_1=1;\ \nu_2=\nu_z=11990$ $\quad F_{st}=\{3{,}8-6{,}6-10{,}8\}$ (табл. VI)

Критерии непараллельности процессов

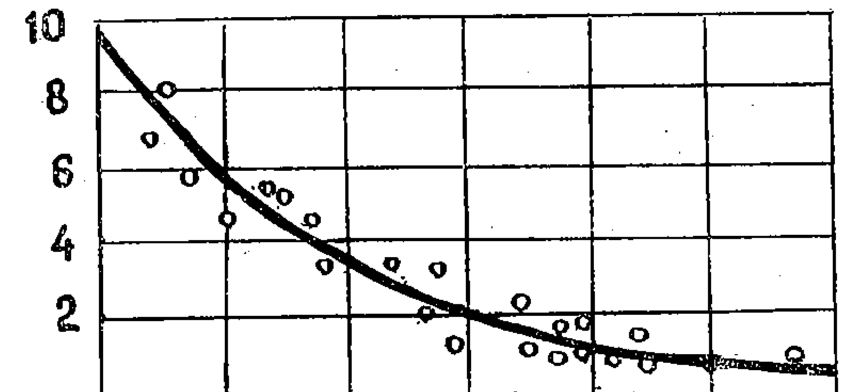
$F_2=\frac{T_2-T_1}{g-1}=\frac{9{,}50-8{,}37}{4}=\underline{0{,}3}$ $\quad \nu_1=g-1=4;\ \nu_2=\nu_z=11990$ $\quad F_{st}=\{2{,}4-3{,}3-4{,}6\}$ (табл. VI)

Достоверность влияния фактора „B" отдельно в каждом процессе

	N	g	$\sum n(\varphi_i-\bar\varphi)^2$ C_x	$g-1$ ν_x	$N-g$ ν_z	$F=\frac{C_x}{\nu_x}$	F_{st}
$B \to A_I$	6500	5	21,00	4	6495	5,3	2,4 – 3,3 – 4,6
$B \to A_{II}$	5500	5	25,00	4	5495	6,25	2,4 – 3,3 – 4,6

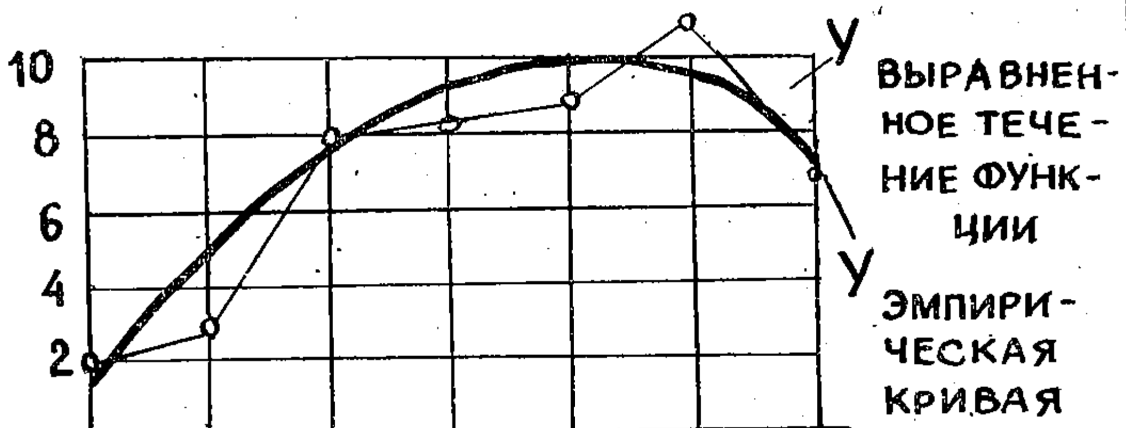
Графические способы выравнивания эмпирических значений функции

I. Точечный график. Плавная кривая среднего течения функции проводится по скоплению точек от руки.



X	0	1	2	3	4	5	6
Y	10	5,6	3,5	2,0	1,5	0,9	0,7

II. Выравнивание эмпирической линии регрессии. Плавная кривая проводится посредине изломов эмпирической линии от руки



X	0	1	2	3	4	5	6
Y	2	3	8	8	9	11	7
Y'	1,0	4,5	7,0	9,0	9,9	9,5	7,8

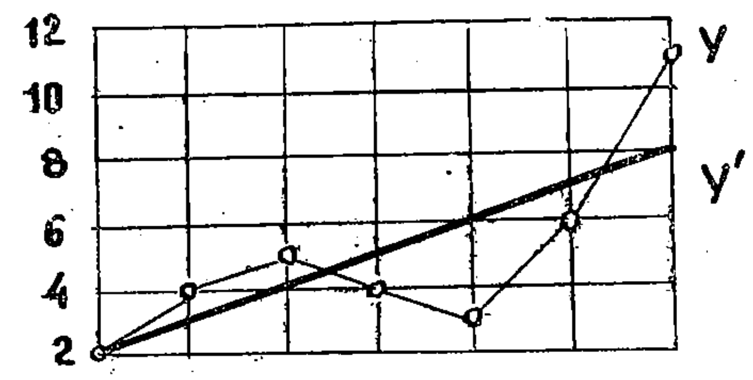
Математические модели биологических процессов

Параболические функции

Общий пример: X – аргумент, Y – функция

X	2	4	6	8	10	12	14	$g = 7$
V	024	345	357	345	135	567	10 11 12	$n = 3 \quad \eta^2 x = \frac{\sum H_i - H_\Sigma}{\sum V^2 - H_\Sigma} = \frac{156}{188} = 0{,}83$
n	3	3	3	3	3	3	3	$N = 21$
ΣV	6	12	15	12	9	18	33	$\sum V = 105 \quad F_\eta^2 = {}^{0{,}83}/_{0{,}17} \cdot {}^{14}/_{6} = \underline{\underline{11{,}4}}$
Hi	12	48	75	48	27	108	363	$\sum H_i = 681 \quad \nu_1 = 6,\ \nu_2 = 14 \quad F_{st} = \{2{,}9 - 4{,}5 - 7{,}4\}$
ΣV²	20	50	83	50	35	110	365	$\sum V^2 = 713 \quad \sigma_z^2 = \frac{\sum V^2 - \sum H_i}{N - g} =$
Y=Mi	2	4	5	4	3	6	11	$H_\Sigma = \frac{105^2}{21} = 525 \quad = \frac{32}{14} = \boxed{2{,}3}$

Парабола первого порядка. Способ Чебышева



$$y' = \alpha + \beta p_1 = = +5{,}0 + 1{,}036\, p_1$$

$$y' = a + bx = = +0.9 - 0{,}51x$$

X	2	4	6	8	10	12	14	$g = 7$
Y	2	4	5	4	3	6	11	$\sum Y = 35 \quad \alpha = \frac{35}{7} = +5$
p_1	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	$\sum p_1^2 = 28$
yp_1	−6	−8	−5	0	+3	+12	+33	$\sum Yp_1 = +29 \quad \beta = \frac{+29}{28} = +1{,}036$
βp_1	−3,1	−2,0	−1,0	0	+1,0	+2,0	+3,1	
$y' = \alpha + \beta p_1$	1,9	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,1	

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{8{,}1 - 1{,}9}{14 - 2} = \frac{+6{,}2}{12} = +0{,}51$$

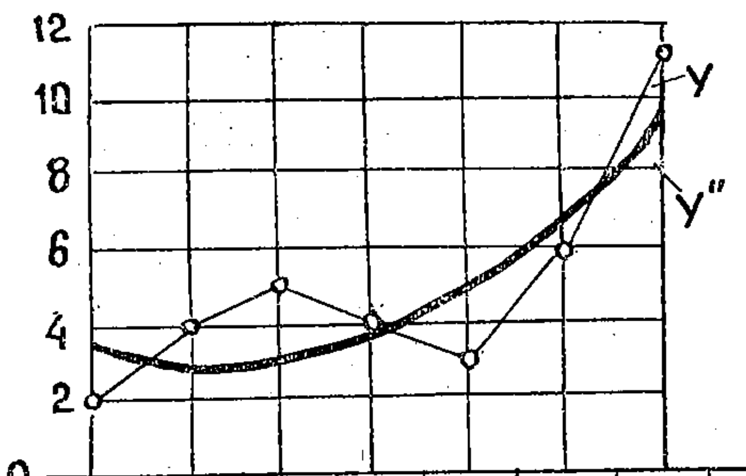
$$a = y - bx = 1{,}9 - 0{,}51 \cdot 2 = +0{,}9$$

$$y' = +0{,}9 + 0{,}51x$$

Проверка

X	+0,51x	y' = +0,9 + 0,51x
14	7,1	8,0
12	6,1	7,0
10	5,1	6,0
8	4,1	5,0
6	3,1	4,0
4	2,0	2,9
2	1,0	1,9

Парабола второго порядка
Способ Чебышева



$$y'' = \alpha + \beta p_1 + \gamma p_2 = $$
$$= +5{,}0 + 1{,}036\, p_1 + 0{,}298\, p_2$$

$$y'' = a + bx + cx^2 = $$
$$= +4{,}5 - 0{,}683x + 0{,}075x^2$$

x	2	4	6	8	10	12	14	$g = 7$
y	2	4	5	4	3	6	11	$\sum y = 35 \quad \alpha = 35/7 = +5{,}0$
p_1	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	$\sum p_1^2 = 28$
p_2	+5	0	−3	−4	−3	0	+5	$\sum p_2^2 = 84$
yp_1	−6	−8	−5	0	+3	+12	+33	$\sum yp_1 = +29;\ \beta = +29/28 = +1{,}036$
yp_2	+10	0	−15	−16	−9	0	+55	$\sum yp_2 = +25;\ \gamma = +25/84 = +0{,}298$
βp_1	−3,1	−2,1	−1,0	0	+1,0	+2,1	+3,1	ЭКСТРЕМУМ:
γp_2	+1.5	0	−0,9	−1,2	−0,9	0	+1,5	$T = -\frac{b}{2c} = \frac{0{,}683}{0{,}150} = 4{,}6$
y''	3,4	2,9	3,1	3,8	5,1	7,1	9,6	

Через равные интервалы по X	y''	x	x^2	$\Delta' y$	$\Delta' x$	$\Delta' x^2$	$\Delta'' y$	$\Delta'' x$
	9,6	14	196	+5,8	+6	+132	+5,4	+72
	3,8	8	64	+0,4	+6	+60		
	3,4	2	4					

$$c = \frac{+5{,}4}{+72} = \boxed{+0{,}075}$$

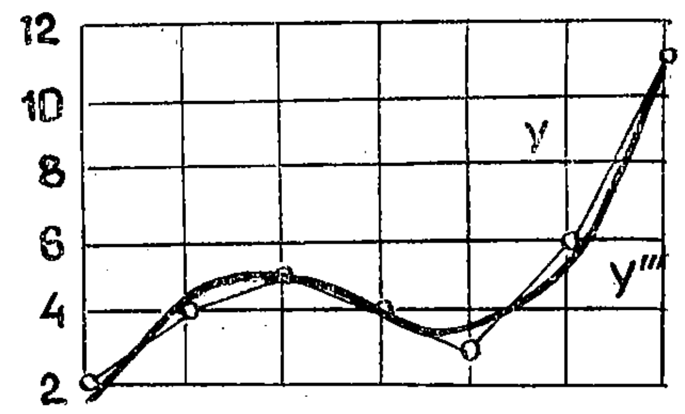
$$b = \frac{\Delta' y - c\Delta' x^2}{\Delta' x} = \frac{+5{,}8 - 0{,}075 \cdot 132}{6} = \boxed{-0{,}683}$$

ПРОВЕРКА

x	x^2	bx	cx^2	y''
14	196	−9,6	+14,7	9,7
12	144	−8,2	+10,8	7.1
10	100	−6,8	+7,5	5,2
8	64	−5,5	+4,8	3,8
6	36	−4,1	+2,7	3,1
4	16	−2,7	+1,2	2,9
2	4	−1.4	+0,3	3,4

$$a = y - bx - cx^2 = 9{,}6 + 0{,}683 \cdot 14 - 0{,}075 \cdot 196 = \boxed{+4{,}46}$$

Парабола третьего порядка
Способ Чебышева



$$y''' = \alpha + \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3 = $$
$$= +5{,}0 + 1{,}036\, p_1 + 0{,}298\, p_2 + 1{,}5\, p_3$$

$$y''' = a + bx + cx^2 + dx^3 = $$
$$= -4{,}61 + 4{,}52x - 0{,}6875x^2 + 0{,}03177x^3$$

x	2	4	6	8	10	12	14	$g = 7$
y	2	4	5	4	3	6	11	$\sum y = 35;\ \alpha = 35/7 = \boxed{+5{,}0}$
p_1	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	$\sum p_1^2 = 28$
p_2	+5	0	−3	−4	−3	0	+5	$\sum p_2^2 = 84$
p_3	−1	+1	+1	0	−1	−1	+1	$\sum p_3^2 = 6$
yp_1	−6	−8	−5	0	+3	+12	+33	$\sum yp_1 = +29;\ \beta = +29/28 = \boxed{+1{,}036}$
yp_2	+10	0	−15	−16	−9	0	+55	$\sum yp_2 = +25;\ \gamma = +25/84 = \boxed{+0{,}298}$
yp_3	−2	+4	+5	0	−3	−6	+11	$\sum yp_3 = +9;\ \delta = +9/6 = \boxed{+1{,}5}$
βp_1	−3,1	−2,1	−1.0	0	+1,0	+2,1	+3,1	$d = \Delta y''' / \Delta''' x^3 = \frac{+12.2}{384} = \boxed{+0{,}03177}$
γp_2	+1,5	0	−0,9	−1,2	−0,9	0	+1,5	$c = \frac{\Delta'' y - d\Delta'' x^3}{\Delta'' x^2} = \frac{+8{,}5 - 0{,}03177 \cdot 960}{32} =$
δp_3	−1,5	+1,5	+1,5	0	−1,5	−1,5	+1.5	$= \boxed{-0{,}6875}$
y'''	1,9	4,4	4,6	3,8	3,6	5,6	11,1	

y'''	x	x^2	x^3	$\Delta' y$	$\Delta' x$	$\Delta' x^2$	$\Delta' x^3$	$\Delta'' y$	$\Delta'' x^2$	$\Delta'' x^3$	$\Delta''' y$	$\Delta''' y^3$
11,1	14	196	2744	+7,5	+4	+96	+1744	+8,5	+32	+960	+12,2	+384
3,6	10	100	1000	−1,0	+4	+64	+784	−3,7	+32	+576		
4,6	6	36	216	+2,7	+4	+32	+208					
1,9	2	4	8									

$$b = \frac{\Delta' y - c\Delta' x^2 - d\Delta' x^3}{\Delta' x} = \frac{+7{,}5 + 0{,}6875 \cdot 96 - 0{,}03177 \cdot 1744}{4} = \boxed{+4{,}52}$$

$$a = y''' - bx - cx^2 - dx^3 = +11{,}1 - 4{,}52 \cdot 14 + 0{,}6815 \cdot 196 - 0{,}03177 \cdot 2744 = \boxed{-4{,}61}$$

Оценка соответствия моделей эмпирическим данным

$$F=\frac{\sigma_\Delta^2}{\sigma_z^2}\geqslant F_{st}\left\{\begin{matrix}\nu_1=g-1\\ \nu_2=N-g\end{matrix}\right\}\qquad \sigma_\Delta^2=\frac{n\sum\Delta^2}{g-1};\qquad \Delta=y'-y$$

σ_z^2 - случайная варианса комплекса

Для алгоритмов 43, 44, 45

$n=3;\ g=7;\ \sigma_z^2=2{,}3$ (см. алгоритм 43)

$$F=\frac{\sigma_\Delta^2}{\sigma_z^2}=\frac{n\sum\Delta^2}{g-1}\cdot\frac{1}{\sigma_z^2}=\frac{3\sum\Delta^2}{6\cdot 2.3}=\frac{\sum\Delta^2}{4.6}\qquad \nu_1=6=g-1=7-1\qquad \nu_2=14=N-g=21-7$$

$F_{st}=\{2.9-4.5-7.4\}$

Парабола первого порядка (алгоритм 43)

x	2	4	6	8	10	12	14
y	2	4	5	4	3	6	11
y′	1,9	2,9	4,0	5,0	6,0	7,0	8,1
Δ′	0,1	1,1	1,0	1,0	3,0	1,0	3,0

$$F_{\Delta_1}=\frac{22{,}22}{4.6}=4.8$$

$\sum\Delta_1^2=22{,}22$

Парабола второго порядка (алгоритм 44)

x	2	4	6	8	10	12	14
y	2	4	5	4	3	6	11
y″	3,4	2,9	3,1	3,8	5,1	7,1	9,6
Δ″	1,4	1,1	1,9	0,2	2,1	1,1	1,4

$$F_{\Delta''}=\frac{14.4}{4.6}=3.1$$

$\sum\Delta''^2=14.4$

Парабола третьего порядка (алгоритм 45)

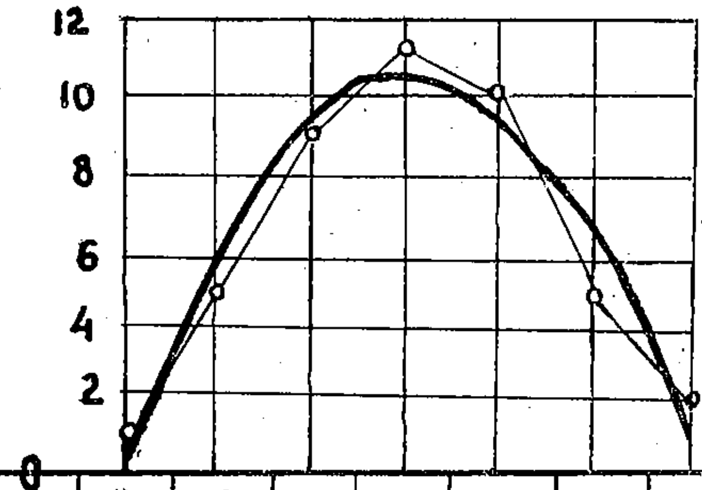
x	2	4	6	8	10	12	14
y	2	4	5	4	3	6	11
y‴	1,9	4,4	4,6	3,8	3,6	5,6	11,1
Δ‴	0,1	0,4	0,4	0,2	0,6	0,4	0,1

$$F_{\Delta'''}=\frac{0.9}{4.6}=0.2$$

$\sum\Delta'''^2=0.9$

Парабола второго порядка с одним максимумом

Способ Чебышева



$y''=6.14+0{,}143\,p_1-1.024\,p_2$

$y''=-6.73+4{,}165x-0{,}256x^2$

x	2	4	6	8	10	12	14	$g=17$
y	1	5	9	11	10	5	2	$\sum y=43 \;\Vert\; \alpha=\frac{\sum y}{g}=\frac{43}{7}=6.14$
p_1	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	$\sum p_1^2=28$
p_2	+5	0	-3	-4	-3	0	+5	$\sum p_2^2=84$
yp_1	-3	-10	-9	0	+10	+10	+6	$\sum yp_1=+4 \;\Vert\; \beta=+4/28=+0{,}143$
yp_2	+5	0	-27	-44	-30	0	+10	$\sum yp_2=-86 \;\Vert\; \gamma=-86/84=-1{,}024$
βp_1	−0.4	−0.3	−0,1	0	+0,1	+0,3	+0,4	$T=\frac{-b}{2c}=\frac{-4.165}{-0.512}=8{,}1$
βp_2	−5,1	0	+3,1	+4,1	+3,4	0	−5,1	
y″	0,6	5,8	9,1	10.2	9,3	6.4	1.4	$A=a+\frac{b}{2}T=-6{,}73+2{,}08\cdot 8{,}1=10{,}1$

Способ конечных разностей

y	x	x^2	$\Delta'y$	$\Delta'x$	$\Delta'x^2$	$\Delta''y$	$\Delta''x^2$
1,4	14	196	−8,8	+6	+132		
10,2	8	64				−18,4	+72
0,6	2	4	+9,6	+6	+60		

Проверка

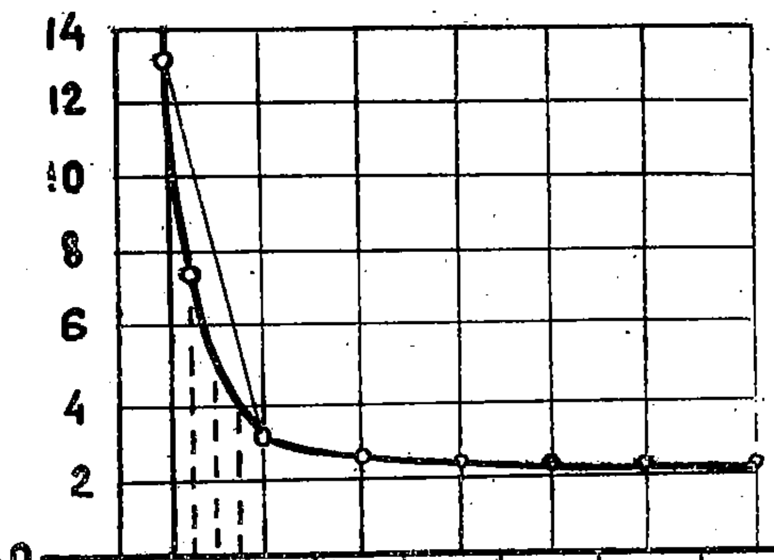
x	x^2	bx	cx^2	y″
14	196	+58,3	−50,2	1,4
12	144	+50,0	−38,9	6,4
10	100	+41.7	−25,6	9,4
8	64	+33,3	−16,4	10,2
6	36	+25,0	−9,2	9,1
4	16	+16,7	−4,1	5,9
2	4	+8,3	−1,0	0,6

$$c=\Delta''y/\Delta''x^2=-18{,}4/72=-0{,}256$$

$$b=\frac{\Delta'y-c\Delta'x^2}{\Delta'x}=\frac{-8{,}8+0{,}256\cdot 132}{+6}=4{,}165$$

$$a=y_i-bx_1-cx_1^2=1{,}4-4{,}165\cdot 14+0{,}256\cdot 196=-6.73$$

Гипербола первого порядка
Способ наименьших квадратов



$$y = a + \frac{b}{x}$$

$$an + b\sum\frac{1}{x} = \sum y$$

$$a\sum\frac{1}{x} + b\sum\frac{1}{x^2} = \sum\left(y\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{y = 1{,}77 + \frac{11.22}{x}}$$

x	1	8	15	22	29	36	43	$g = 7$				
y	13,0	3,0	2,5	2,3	2,2	2,1	2,1	$\sum y = 27{,}2$				
$1/x$	1,0							$\sum\frac{1}{x} = 1{,}3228$				
$1/x^2$	1,0							$\sum\frac{1}{x^2} = 1{,}0246$				
$y\cdot\frac{1}{x}$	13,0							$\sum\left(y\cdot\frac{1}{x}\right) = 13{,}8296$				
b/x	11,22	1,40	0,75	0,51	0,39	0,31	0,26	x	2	4	6	8
y'	12,99	3,17	2,52	2,28	2,16	2,08	2,03	y'	7,4	4,5	3,6	3,1

$$7a + 1{,}3228\,b = 27{,}2$$

$$(1{,}3228\,a + 1{,}0246\,b = 13{,}8296) \quad \times 5{,}2918$$

$$7 : 1{,}3228 = 5{,}2918$$

$$7a + 5{,}4220\,b = 73{,}1834$$

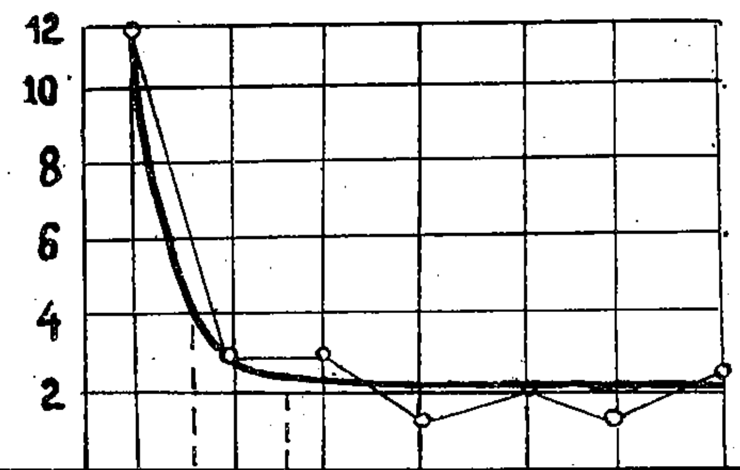
$$7a + 1{,}3228\,b = 27{,}2$$

$$0 + 4{,}0992\,b = 45{,}9834$$

$$b = \frac{45{,}9834}{4{,}0992} = \boxed{+11{,}2177}$$

$$a = \frac{2{,}72 - 11{,}2177\cdot 1{,}3228}{7} = \boxed{1{,}77}$$

Гипербола третьего порядка
Способ наименьших квадратов



$$y = a + \frac{b}{x^3}$$

$$ga + b\sum\frac{1}{x^3} = \sum y$$

$$a\sum\frac{1}{x^3} + b\sum\frac{1}{x^6} = \sum\left(y\cdot\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\boxed{y = 2{,}1 + \frac{79{,}62}{x^3}}$$

x	2	4	6	8	10	12	14	$g = 7$				
y	12,0	3,3	3,0	1,8	2,1	1,9	2,2	$\sum y = 26{,}3$				
$1/x^3$	0,125							$\sum 1/x^3 = 0{,}14825$				
$1/x^6$	0,015625							$\sum 1/x^6 = 0{,}01590$				
$y\cdot 1/x^3$	1,5	0,05156						$\sum\left(y\frac{1}{x^3}\right) = 1{,}57297$				
b/x^3	9,95	1,24	0,34	0,16	0,08	0,05	0,03	x	3	4	5	6
y'''	11,6	3,3	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	y'''	5,1	3,3	2,7	2,4

$$7a + 0{,}14825\,b = 26{,}3$$

$$(0{,}14825\,a + 0{,}01590\,b = 1{,}57297) \quad \times 47{,}2175$$

$$7 : 0{,}14825 = 47{,}2175$$

$$7a + 0{,}75076\,b = 74{,}27171$$

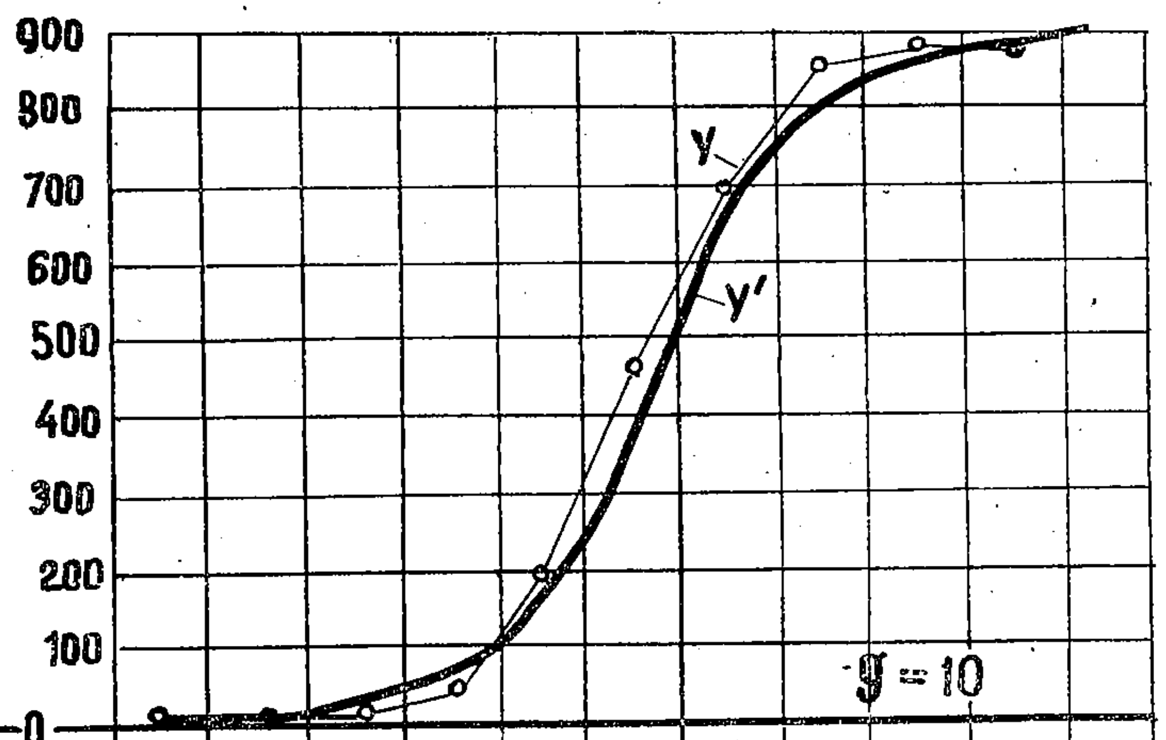
$$7a + 0{,}14825\,b = 26{,}3$$

$$0 + 0{,}60251\,b = 47{,}97171$$

$$b = \frac{47{,}97171}{0{,}60251} = \boxed{+79{,}61977}$$

$$a = \frac{26{,}3 - 0{,}14825\cdot 79{,}61977}{7} = \boxed{2{,}1}$$

Логистическая функция - симметричная



$y = \frac{A}{1+10^z} + C$

$z = f(x) = a + bx$

$A = 900;\ C = 0$

$1 + 10^z = A/y$

$z = \lg(A/y - 1)$

$z' = \alpha + \beta p_1 =$
$= 0{,}3363 -$
$- 0{,}2683\,p$

$p_1 = 2x - 9$

$\boxed{z' = 2{,}7510 - 0{,}5366\,x}$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
Y	2	5	10	60	200	450	700	850	880	885	-	
A/y	450	180	90	15	4.5	2	1.286	1,059	1,023	1,017	-	
$A/y-1$	449	179	89	14	3.5	1	0,286	0,059	0,023	0.017	-	
$z = \lg(A/y-1)$	2,652	2,253	1,949	1,146	0,544	0	-0,544	-1.229	-1.638	-1.770	-	$\Sigma z = +3{,}363$
p_1	-9	-7	-5	-3	-1	+1	+3	+5	+7	+9	-	$\Sigma p_1^2 = 330$
zp_1	-23,868	-15,771	-9,745	-3,438	-0,544	-0	-1,632	-6,145	-11,466	-15,930	-	$\Sigma zp_1 = -88{,}539$
$-0{,}2683 \cdot p_1$ βp_1	+2,414	+1,878	+1,342	+0,805	+0,268	-0,268	-0,805	-1,342	-1,878	-2,414	-	$\beta = \frac{\Sigma zp_1}{\Sigma p_1^2} = -0{,}2683$
z^1	+2,750	+2,214	+1,678	+1,141	+0,604	-0,068	-0,469	-1,006	-1,512	-2,078	-2,614	$\alpha = \frac{\Sigma z}{9} = +0{,}3363$
$(A/y-1)'$	562	164	47,6	13,8	4,06	1,17	0,340	0,099	0,099	0,008	0,002	
$(A/y)'$	563	165	48,6	14,8	5,08	2,17	1,340	1,099	1,099	1,008	1,002	
y'	2	5	19	61	174	415	672	819	873	893	899	
$-0{,}5366\,x$	0	-0,5366	-1,073	-1,610	-2,146	-2,683	-3,220	-3,756	-4,293	-4,829	-5,365	
z'	2,751	2,214	1,678	1,141	0,605	0,068	-0,469	-1,005	-1,542	-2,078	-2,615	

$$y' = \frac{900}{1 + 10^{2{,}751 - 0{,}5366\,x}}$$

Количество информации (негэнтропия) в распределениях

Распределение количественных признаков (в соответствии с четвертым алгоритмом)

W	380	390	400	410	420	430	440	450	N=100
f	1	6	10	25	30	20	7	1	
p	0,01	0,06	0,10	0,25	0,30	0,20	0,07	0,01	
Э	,066	,244	,332	,500	,521	,464	,269	,066	=2,462

W - классы распределения

$p = f/N$ - доли частот

$Э = -p \lg_2 p$ - частные энтропии по классам, находятся для каждой доли по таблице значений энтропии (XII)

f - частоты, число объектов в каждом классе

$Э = \Sigma Э = [2{,}462]$ общая энтропия, количество информации во всем распределении, общая негэнтропия

Распределение альтернативных, качественных признаков

W	родилось ♂	родилось ♀	Σ
f	5000	4995	9995
p	0,5003 (p)	0,4997 (1-p)	1,0000
Э	0.4999	0,5001	1,0000

$Э = -p \lg_2 p =$

$= -p \cdot \frac{\lg_{10} p}{0{,}30103}$

$Э = \Sigma Э = 1{,}0$ бит

$= Э(p) + Э(1-p)$

Алгоритм 52

Количество информации (негэнтропия) в поколениях скрещиваний

во втором поколении генетических дигибридных скрещиваний ($F_1 + F_1 = F_2$) при доминировании

W	[AB]	[Ab]	[aB]	ab	Σ
f	9	3	3	1	16
p	0,5625	0,1875	0,1875	0,0625	1,0000
э	0,4669	0,4528	0,4528	0,2500	1,6225≈1,6

$Э = \sum Э = 1{,}6 = 0{,}8\,g = 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$

g – число генов (пар аллеломорфов)

во втором поколении генетических дигибридных скрещиваний ($F_1 + F_1 = F_2$) при промежуточном наследовании и при $Aa = aA$; $Bb = bB$

W	AABB	AABb	AaBB	AaBb	AAbb	Aabb	aaBB	aaBb	aabb	
f	1	2	2	4	1	2	1	2	1	N = 16
$p = f/N$	,063	,125	,125	,250	,063	,125	,062	,125	,062	$\sum p = 1$
Э	,251	,375	,375	,500	,251	,375	,249	,375	,249	$Э = \sum Э = 3{,}000$

$Э = \sum Э = 3{,}0 = 1{,}5\,g = 1{,}5 \cdot 2 = 3{,}0$

Алгоритм 53

Информационный анализ влияния

признаки – количественные, комплексы – однофакторные

$ИПВ = Э_x / Э_y$ – информационный показатель силы влияния

$Э_x = Э_y - Э_z$ – негэнтропия факториального разнообразия

$Э_y = \sum Э_2$ – общая энтропия комплекса

$Э_z = \dfrac{\sum(n_1 \sum Э_1)}{N}$ – энтропия случайного разнообразия

2 \ 1	I	II	III	IV	V	n_2	p_2	$Э_2$
22	$\boxed{f\ p\ э}$			1; 0,100; 0,322		1	0,022	0,121
20			1; 0,100; 0,332			1	0,022	0,121
18			1; 0,100; 0,332	8; 0,800; 0,258		9	0,196	0,461
16	1; 0,100; 0.332	1; 0,125; 0.375	7; 0,700; 0,360		1; 0,125; 0,375	10	0,217	0,478
14	8; 0,800; 0,258	6; 0,750; 0,311	1; 0,100; 0,332	1; 0,100; 0,332		16	0,347	0,530
12	1; 0,100; 0.332	1; 0,125; 0,375			6; 0,750; 0,311	8	0,174	0,439
10					1; 0,125; 0,375	1	0,022	0,121
n_1	10	8	10	10	8	46	1,000	$\boxed{2{,}27}$
$\sum Э_1$	0,922	1,061	1,356	0,922	1,061			
$n_1 \sum Э_1$	9,22	8,49	13,56	9,22	8,49			

$\sum(n \sum Э_1) = 48{,}98$

$Э_z = \dfrac{\sum(n \sum Э_1)}{N} = 1{,}06$

$Э_y = \sum Э_2 = 2{,}27$; $Э_x = Э_y - Э_z = 2{,}27 - 1{,}06 = 1{,}21$

$ИПВ = Э_x / Э_y = 1{,}21 / 2{,}27 = 0{,}53$

$\boxed{\eta_x^2 = 0{,}68}$

Информационный анализ влияний;

ПРИЗНАКИ – КАЧЕСТВЕННЫЕ, КОМПЛЕКСЫ-ОДНОФАКТОРНЫЕ

ИПВ - $Э_x/Э_y$ - ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ СИЛЫ ВЛИЯНИЯ

$Э_x = Э_y - Э_z$ - НЕГЭНТРОПИЯ ФАКТОРИАЛЬНОГО РАЗНООБРАЗИЯ

$Э_y = Э(p) + Э(Q)$ - ОБЩАЯ ЭНТРОПИЯ $\left(p = \frac{\sum m}{n};\ Q = 1 - p\right)$

$Э_z = \frac{\sum(n \sum Э_1)}{N}$ - ЭНТРОПИЯ СЛУЧАЙНОГО РАЗНООБРАЗИЯ

	I	II	III	IV	V	$\sum$
n	20	30	40	30	40	160
m	2	3	8	15	20	48
p	0,1	0,1	0,2	0,5	0,5	–
Q	0,9	0,9	0,8	0,5	0,5	–
$Э_p$	0,332	0,332	0,465	0,500	0,500	–
$Э_Q$	0,137	0,137	0,258	0,500	0,500	–
$\sum Э_1$	0,469	0,469	0,723	1,000	1,000	
$n\sum Э_1$	9,38	14,07	28,97	30,00	40,00	122,37

N = 160

$\sum m = 48$

$\sum(n \sum Э_1) = 122{,}37$

$p = \frac{\sum m}{N} = 0{,}3$

$Q = 1 - p = 0{,}7$

$Э_2 p = 0{,}521$

$Э_2 Q = 0{,}360$

$Э_y = Эp + ЭQ = 0{,}881$

$Э_z = \frac{\sum n(\sum Э_1)}{N} = 0{,}765$

$= \frac{122{,}37}{160} = 0{,}765$

$Э_x = Э_y - Э_z = 0{,}881 - 0{,}765 = 0{,}116$

$ИПВ = Э_x/Э_y = 0{,}116/0{,}881 = 0{,}13$

$\boxed{\eta_x^2 = 0{,}15}$

Количество информации во втором поколении скрещиваний

$$\boxed{H_\Sigma = \sum H_i;\ H_i = -p\,\ell g_2 p = -p\,\frac{\ell g_{10} p}{0{,}30103}}$$

H_Σ - ОБЩАЯ ЭНТРОПИЯ (В БИТАХ)

H_i - ЧАСТНАЯ ЭНТРОПИЯ КАЖДОЙ ГРУППЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ

g - ЧИСЛО ГЕНОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ РАЗВИТИЕ ПРИЗНАКА

N - ОБЪЁМ (ПОЛНЫЙ) ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ

W - ОБЪЕМ КАЖДОЙ ГРУППЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ

$p = W/N$ - ДОЛЯ ПОТОМКОВ В ГРУППАХ РАСЩЕПЛЕНИЯ

$\ell g_2, \ell g_{10}$ - ЛОГАРИФМЫ - ДВОИЧНЫЙ И ДЕСЯТИЧНЫЙ

$\hat{n}$ - ОБЪЁМ ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ (ПОЛНОГО) ГАРАНТИРУЮЩИЙ НАЛИЧИЕ В ГРУППЕ ХОТЯ БЫ ОДНОГО ПОЛНОГО РЕЦЕССИВА С ВЕРОЯТНОСТЬЮ БЕЗОШИБОЧНОГО ПРОГНОЗА 0,95; 0,99; 0,999

g	N	H_Σ			$\hat{n}$		
		ВО ВТОРОМ ПОКОЛЕНИИ		ПРИ ОБРАТНЫХ АНАЛИЗИРУЮЩИХ СКРЕЩИВ.			
		ПРИ ДОМИНИРОВ.	ПРИ ПРОМЕЖ. НАСЛ.		$\beta_1=0{,}95$	$\beta_2=0{,}99$	$\beta_3=0{,}999$
1	4	0,8	1,5	1	12	18	28
2	16	1,6	3,0	2	48	74	110
3	64	2,4	4,5	3	192	294	442
4	256	3,2	6,0	4	768	1178	1766
5	1024	4,0	7,5	5	3072	4710	7066
6	4096	4,8	9,0	6	12288	18842	28262
7	16384	5,6	10,5	7	49152	75367	113050
-	-	$H_\Sigma = 0{,}8g$ $g = 1{,}25 H_\Sigma$	$H_\Sigma = 1{,}25g$ $g = \frac{2}{3} H_\Sigma$	$H_\Sigma = g$	$\hat{n} = 3N$	$\hat{n} = 4{,}6N$	$\hat{n} = 6{,}9N$

Качественные признаки
Показатели силы влияния

Дисперсионный: $\eta^2 = C_x / C_y = 1 - C_z / C_y$

Информационный: $ИПВ = Э_x / Э_y = 1 - Э_z / Э_y$

градации	1	2	3	4	5	$g = 5$
n	20	30	40	30	40	$N = \sum n = 160$
m	2	3	8	15	20	$\sum m = 48$
$p = \frac{m}{n}$	0,1	0,1	0,2	0,5	0,5	$p = \frac{\sum m}{N} = \frac{48}{160} = 0.3$
$q = 1 - p$	0,9	0,9	0,8	0,5	0,5	$C_y = N \cdot P \cdot Q = 160 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 33{,}6$
$m \cdot q$	1,8	2,7	6,4	7,5	10,0	$C_z = \sum mq = 28.4$
$Эp$	,33	,33	,46	,50	,50	$ЭP = Э\,0{,}3 = 0{,}52$
$Эq$	,14	,14	,26	,50	,50	$ЭQ = Э(1-P) = Э\,0{,}7 = 0{,}36$
$\sum Э_i$	,47	,47	,72	1,00	1,00	$Э_y = ЭP + ЭQ = 0{,}88$
$n \sum Э_i$	9,4	14,1	28,8	30,0	40,0	$Э_z = \frac{\sum (n \sum Э_i)}{N} = \frac{122{,}3}{160} = 0{,}76$

$\eta^2 = 1 - 28.4 / 33{,}6 = \underline{0.16}$

$ИПВ = 1 - 0.76 / 0{,}88 = 0{,}14$

$F_{\eta^2} = \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \cdot \frac{N-g}{g-1} = \frac{0{,}16}{0{,}84} \cdot \frac{155}{4} = \underline{7{,}1}$

$\nu_1 = 4$ $\quad F_{st}\{2{,}4 - 3{,}4 - 4{,}9\}$

$\nu_2 = 155$

Двузначная таблица энтропии

$p = 0{,}48 \quad Э[0{,}48] = 0{,}51$

$Э = -p\,lg_2 p = -p \frac{lg_{10} p}{0.30103}$

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0	0,7	11	15	19	22	24	27		31
0,1	33	35	36	38	40	41	42	43	45	46
0,2	46	47	48	49	49	50	51	51	51	52
0,3	52	52	53	53	53	53	53	53	53	53
0,4	53	53	53	52	52	52	52	51	51	50
0,5	50	50	49	49	48	47	47	46	46	45
0,6	44	44	43	42	41	40	40	39	38	37
0.7	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27
0,8	26	25	23	22	21	20	19	17	16	14
0,9	12	12	11	10	08	07	06	04	03	01

Количественные признаки.
Показатели силы влияния:

Дисперсионный: $\eta^2 = C_x / C_y = 1 - C_z / C_y$

Информационный: $ИПВ = Э_x / Э_y = 1 - Э_z / Э_y$

	W	a	градации 1	2	3	4	5	n	p	э
	350	5	$^{1},14_{20}$		$^{1}.08_{29}$	$^{1},10_{33}$		3	0,07	0,27
	340	4	$^{3}.43_{52}$	$^{2},29_{52}$	$^{1},08_{29}$	$^{1},10_{33}$	$^{1},12_{36}$	8	0,18	0,45
	330	3	$^{2},29_{52}$	$^{3},42_{53}$	$^{3}.25_{50}$	$^{2}.20_{46}$	$^{1},13_{38}$	11	0,25	0,50
K = 10	320	2	$^{1}.14_{40}$	$^{2},29_{52}$	$^{4},34_{53}$	$^{3}.30_{52}$	$^{2}25_{50}$	12	0,27	0,51
	310	1			$^{3}.25_{50}$	$^{2}.20_{46}$	$^{2}25_{50}$	7	0,16	0,42
	A = 300	0	$^{f}p_{э}$			$^{1},10_{33}$	$^{2}25_{50}$	3	0,07	0,27
	n_a		7	7	12	10	8	N = 44	$Э_y = \boxed{2{,}42}$	
	$\sum Э_i$		1,84	1,57	2,11	2,43	2,24	$Э_z = \sum(n \sum Э_i)/N = 91.41/44 = \boxed{2{,}08}$		
	$n_a \sum Э_i$		12,88	10,09	25,32	24,30	17,92			
	$\sum f_a$		25	21	29	23	13	$S_1 = \sum\sum fa = 111$		
	$\sum f a^2$		95	67	87	73	35	$S_2 = \sum\sum fa^2 = 357$		
	$C_i = \sum fa^2 - \frac{(\sum fa)^2}{n}$		5,7	4,0	16,9	20,1	13,9	$\sum c_i = 60{,}6$		

$C_z = \sum C_i = \boxed{60{,}6}$; $C_y = S_2 - \frac{S_1^2}{N} = 357 - \frac{111^2}{44} = \boxed{77{,}0}$

$\eta^2 = 1 - \frac{60{,}6}{77{,}0} = \underline{0{,}21}$

$ИПВ = 1 - \frac{2{,}08}{2{,}42} = 0{,}14$

$F_{\eta^2} = \frac{0{,}21}{0{,}79} \cdot \frac{44-5}{5-1} = \underline{2{,}6}$; $\nu_1 = 4$; $\nu_2 = 39$; $F_{st}\{2{,}6 - 3{,}8 - 5{,}8\}$

СОПОСТАВЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

$$\eta^2 = C_x / C_y \quad ; \quad ИПВ = 1 - Э_z / Э_y$$

признаки количественные

	I	II	III	IV	V		I	II	III	IV	V	
7							1					
6						$\eta^2=0$		2	1			$\eta^2=0$
5	1	1	1	1	1					2	1	
4	2	2	2	2	2	ИПВ=0	2		2		2	ИПВ=
3	1	1	1	1	1					2	1	=0,50
2								2	1			
1							1					
Mi	4	4	4	4	4	—	4	4	4	4	4	—
7					1		1	2	1		1	
6		1	1	1	2	$\eta^2=0,44$				2	2	$\eta^2=0,14$
5	1	2	2	2	1				2		1	
4	2	1	1	1		ИПВ=	2			2		ИПВ=
3	1					=0,24		2	1			=0,47
2												
1							1					
Mi	4	5	5	5	6	—	4	5	5	5	6	—

СОПОСТАВЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

$$\eta^2 = 1 - \frac{C_z}{C_y} \quad ; \quad ИПВ = 1 - \frac{Э_z}{Э_y}$$

признаки качественные

	I	II	III	IV	V	η^2	ИПВ
n	20	20	20	20	20		
m	10	10	10	10	10		
P	.5	.5	.5	.5	.5	.00	.00
P	.40	.45	.50	.55	.60	.02	.02
P	.30	.40	.50	.60	.70	.08	.06
P	.20	.35	.50	.65	.80	.18	.14
P	.10	.30	.50	.70	.90	.32	.26
P	0	.25	.50	.75	1.00	.50	.48
P	0	0	.50	1.00	1.00	.80	.80
P	0	0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Алгоритм 60

СУММА КВАДРАТОВ (C_z) и ЭНТРОПИЯ ($Э_z$) случайного разнообразия в дисперсионных комплексах

	I	II	III		X	Z	Y
4				C	0	6,0	6,0
3	1	1	1				
2	2	2	2				
1	1	1	1				
0				Э	0	1,5	1,5
n	4	4	4				
M	2	2	2				
4	1	1	1	C	0	24,0	24,0
3							
2	2	2	2				
1							
0	1	1	1	Э	0	1,5	1,5
n	4	4	4				
M	2	2	2				

Николай Александрович Плохинский
АЛГОРИТМЫ БИОМЕТРИИ
Зав. редакцией **Н. М. Глазкова**
Редактор **Б. С. Шорников**
Редактор издательства **Н. Г. Комлева**
Художественный редактор **Б. С. Вехтер**
Обложка художника **Е. К. Самойлова**
Технический редактор **Е. Д. Захарова**
Корректоры **Л. А. Айдарбекова, Л. А. Кузнецова**

Тематический план 1980 г. № 130
ИБ № 958

Сдано в набор 22.02.80. Подписано к печати 19.11.80.
Л-113117 Формат 70×100 1/16. Бумага тип. № 3
Гарнитура литературная. Высокая и офсетная печать.
Усл. печ. л. 12,02+1 вкл. (0,125) Уч.-изд. л. 12,02
Тираж 4900 экз. Заказ 313
Цена 50 коп. Изд. № 406.

Издательство
Московского университета
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ.
Москва, Ленинские горы

МОИП